MATEMAGIČAR

Matka 30 (2021./2022.) br. 119

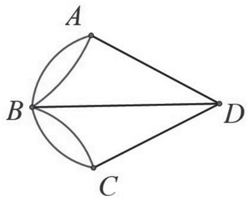
Petar Mladinić, Zagreb

OBILAZAK ILI CRTANJE LIKOVA BEZ PODIZANJA OLOVKE

U Matki 112 i Matki 113 objavljene su *Eulerovske detektivske priče 1 i 2* u kojima je opisan problem 7 mostova u Königsbergu. U ovom ćemo tekstu razmotriti probleme u kojima se mogu primijeniti Eulerova ideja grafičkog prikaza problema i njegov poučak.

Uvod

Problem mostova riješio je **Leonhard Euler** (1707. – 1783.) nacrtavši graf kojim je vizualizirao povezanost dvaju otočića na rijeci i dviju obala s položajem 7 mostova.



Pitanje je bilo može li netko (pješak) „prošetati" preko svih mostova samo jedanput. Euler je dokazao da se to u slučaju 7 mostova ne može i dao matematičko obrazloženje. Uočio je da mjesta (točke) označena s *A*, *B*, *C* i *D* povezuje određeni broj staza/mostova. Svakoj je točki pridružio broj tih staza. Točki *A* pridružio je broj 3, točki *B* broj 5, točki *C* broj 3 i točki *D* broj 3.

Euler je dokazao da se ovakav ili sličan obilazak (šetnja) može ostvariti samo ako su svi pridruženi brojevi parni ili ako samo dvije točke imaju pridruženi neparni broj. Te je brojeve Euler nazvao *karakteristikom točke*.

U prvom se slučaju može krenuti u šetnju iz bilo koje točke i prošetati svim stazama jedanput.

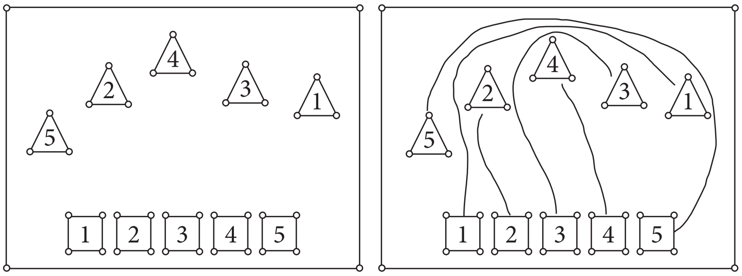
U drugom se slučaju obilazak može ostvariti samo ako se krene iz jedne točke s neparnom karakteristikom i završi u drugoj točki s neparnom karakteristikom.

Tim njegovim poučkom/tvrdnjom i vizualizacijom problema započela je nova grana matematike nazvana *teorija grafova*.

U ovom ćemo tekstu u rješavanju problema i zadataka uporabiti Eulerovu ideju vizualizacije i primijeniti njegov poučak.

Primjeri za zagrijavanje

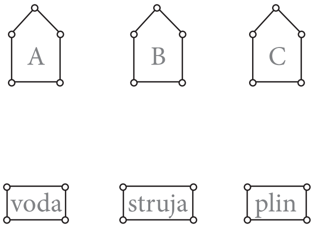
Primjer 1. Unutar omeđenog područja, zakrivljenom crtom povežite 5 kvadrata i 5 trokuta označenih istim znamenkama (vidi lijevu sliku) tako da se crte/staze ne presijecaju.



Rješenje. Na desnoj slici prikazano je jedno moguće rješenje. Za vježbu nađite barem još jedno rješenje.

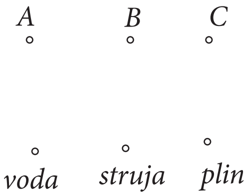
Sljedeći je primjer poznat kao problem 3 kuće i 3 izvora, ili kao problem K_3^3.

Primjer 2. Na zemljištu (u ravnini!) nalaze se 3 kuće označene s *A*, *B* i *C* i 3 priključka za: struju, vodu i plin (vidi sliku). Svaku kuću treba priključiti na struju, vodu i plin, ali tako da se cijevi/kabeli međusobno ne presijecaju, da leže u istoj ravnini i da ne prolaze kroz neku kuću.



Rješavanje ovog problema koji je vizualiziran sljedećim grafom (v.sl.) polučilo je otkriće niza novih činjenica u teoriji grafova.

Graf ovoga problema u teoriji je poznat pod nazivom K_3^3 graf.



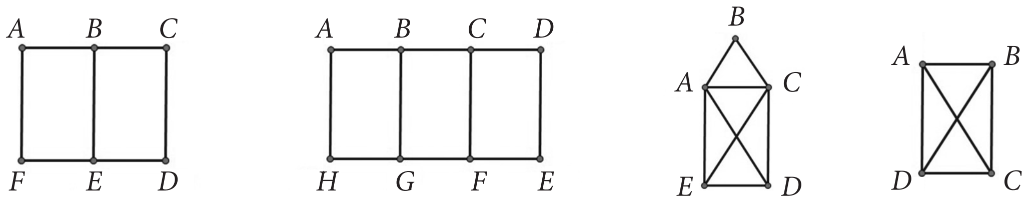
Pokušajte nacrtati rješenje poštujući uvjete. Mogu li se 3 kuće uspješno priključiti na 3 izvora?

Ako mogu, onda nacrtajte rješenje/graf, a ako ne mogu, onda obrazložite zašto ne postoji takav graf i u čemu je problem nemogućnosti crtanja ravninskog grafa K_3^3.

Primjeri crtanja likova ili staza bez podizanja olovke

U ovim slučajevima spojnice točaka (koje u teoriji grafova zovemo *bridovima*) mogu se presijecati, ali moraju povezati sve naznačene vrhove likova.

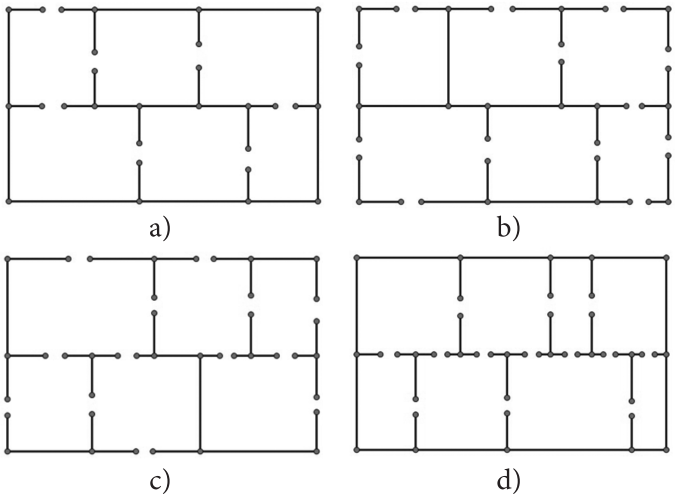
Primjer 3. Nacrtajte likove a), b), c) i d) bez podizanja olovke s papira.



Koje likove možete nacrtati na taj način, a koje ne možete? Objasnite!

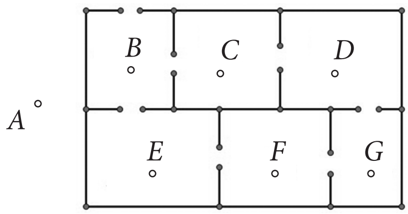
U sljedećem primjeru vizualizirane su prostorije a), b), c) i d) s vratima tako da su nacrtani tlocrti tih prostorija, a na dužinama koje predočavaju zidove prekidi simboliziraju vrata.

Primjer 4. Može li se proći kroz sva vrata samo jedanput?

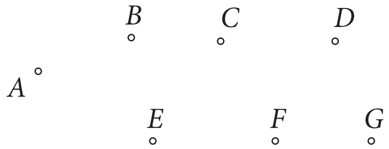


Rješavanje slučaja a) ilustrirat ćemo na dva načina. Jedan je način da nacrtamo/kreiramo Eulerov graf, uočimo karakteristiku vrha i primijenimo Eulerov poučak. Drugi je način da nacrtamo stazu prolaska kroz vrata. Ostale primjere/slučajeve riješite na jedan od ta dva načina.

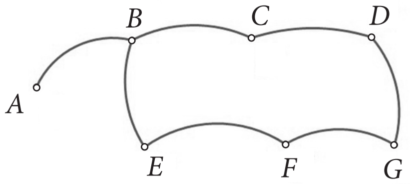
Označimo područja s A, B, C, D, E, F i G (vidi sliku).



„Zanemarimo" tlocrt tako da ostanu samo točke/vrhovi grafa (vidi sliku.).



Nacrtajmo bridove Eulerova grafa. Brid je svaka spojnica točaka koja se može načiniti prolaskom kroz vrata (vidi sliku).



Uočimo da je karakteristika vrha A jednaka 1, vrha B je 3, a ostali vrhovi imaju parnu karakteristiku. Dakle, prema Eulerovu poučku postoji prolaz kroz sva vrata jedanput ako se krene iz točke s neparnom točkom (iz A ili iz B) i završi u drugoj neparnoj točki (u B ili u A).

Ima li više različitih prolaza tj. rješenja u ovome primjeru? Nacrtajte jednu takvu stazu kojom nećete dizati olovku s papira.

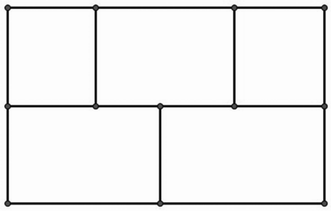
Zadatci

Evo zadataka za vježbu i provjeru metode.

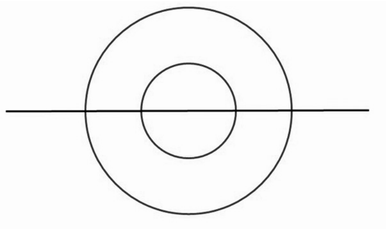
1. Ovaj sam zadatak prvi put vidio jednoga ljeta davne godine mojega djetinjstva. Osoba koja mi ga je zadala tvrdila je da je zadatak lagan i rješiv.

Svi moji djetinji pokušaji uvijek bi se sveli na to da bi mi jedna dužina ostala nepresječena. Nisam mogao razumjeti kako takav jednostavan zahtjev nema rješenje. Danas mi se čini da me je taj problem usmjerio na studij matematike i na moj diplomski rad iz teorije grafova i Euleovov poučak koji daje odgovor na tada postavljeni mi problem.

Za vježbu presijecite svaku dužinu na slici/liku samo jedanput.



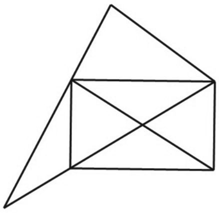
2. Bez podizanja olovke s papira nacrtajte sljedeći lik.



3. Koja slova abecede možete napisati bez podizanja olovke s papira? Koja se slova mogu zapisati bez podizanja olovke s papira?

4. Koja se slova uglate glagoljice mogu napisati bez podizanja olovke s papira?

5. Bez podizanja olovke s papira nacrtajte sljedeći lik.



6. Bez podizanja olovke s papira nacrtajte sljedeći lik.