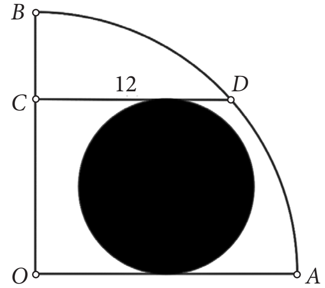
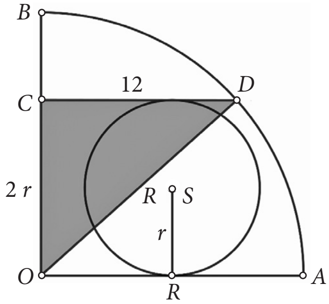
Matka 30 (2021./2022.) br. 119

TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Izračunaj površinu bijeloga dijela kružnoga isječka ako je $|\angle AOB| = 90^\circ$ i $\overline{CD} \parallel \overline{OA}$.





Rješenje: Označimo radijus kružnoga isječka s R, a radijus kruga s r. Površina kružnoga isječka je četvrtina površine kruga radijusa R, što iznosi $\frac{1}{4}R^2\pi$. Površina crnoga kruga je $r^2\pi$. Površina bijeloga dijela jednaka je razlici tih dviju površina, tj. $p = \frac{1}{4}R^2\pi - r^2\pi$.

Istaknimo trokut ODC kako je prikazano na slici. To je pravokutni trokut za čije katete vrijedi $|OC| = 2r$ i $|CD| = 12$, a hipotenuza ima duljinu $|OD| = R$.

Prema Pitagorinu poučku vrijedi: $|OD|^2 = |OC|^2 + |CD|^2$.

$R^2 = (2r)^2 + 12^2$

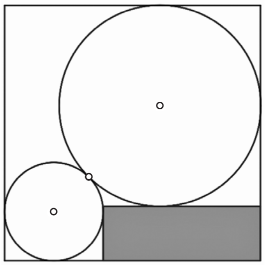
$R^2 = 4r^2 + 144$

Iz $p = \frac{1}{4}R^2\pi - r^2\pi$ slijedi

$p = \frac{1}{4}(4r^2 + 144)\pi - r^2\pi = r^2\pi + 36\pi - r^2\pi = 36\pi$.

Dakle, površina bijeloga dijela kružnoga isječka je 36π.

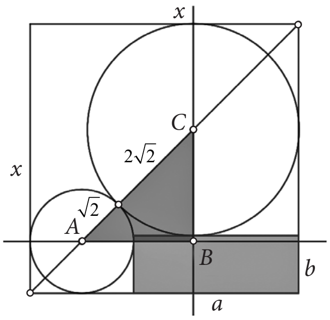
Primjer 2. Izračunaj površinu osjenčanoga pravokutnika ako je površina manjega kruga 2π, a većega 8π. Krugovi diraju stranice pravokutnika i kvadrata kako je prikazano na slici.



Rješenje: Ako radijus manjega kruga označimo r_1, a radijus većega kruga r_2, onda se iz njihovih zadanih površina dobiva:

$$r_1^2\pi = 2\pi \Rightarrow r_1^2 = 2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{2},$$
$$r_2^2\pi = 8\pi \Rightarrow r_2^2 = 8 \Rightarrow r_2 = \sqrt{8} \Rightarrow r_2 = 2\sqrt{2}.$$

Označimo središta zadanih krugova s A i C te nacrtajmo međusobno okomite pravce koji se sijeku u točki B kako je prikazano na slici. Svaki od tih dvaju pravaca usporedan je s jednom od stranica kvadrata. Točke A, B i C vrhovi su pravokutnoga jednakokračnog trokuta ABC kojemu hipotenuza $\overline{AC}$ ima duljinu $|AC| = r_1 + r_2 = 3\sqrt{2}$. Za katete trokuta ABC vrijedi $|AC| = |AB|\sqrt{2} = |BC|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, iz čega slijedi da je $|AB| = |BC| = 3$.



Označimo duljine stranica kvadrata s x. Istu duljinu možemo izraziti i pomoću radijusa zadanih kružnica i duljine kateta trokuta ABC, tj. vrijedi $x = r_1 + |AB| + r_2 = \sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3$.

Označimo duljine stranica pravokutnika čiju površinu treba izračunati s a, odnosno b.

Budući da pravokutnik dira krugove, za duljine njegovih stranica vrijedi:

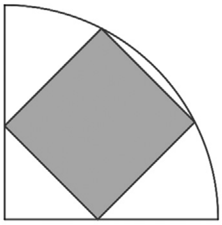
$a = x - 2r_1 = 3\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$,

$b = x - 2r_2 = 3\sqrt{2} + 3 - 4\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$,

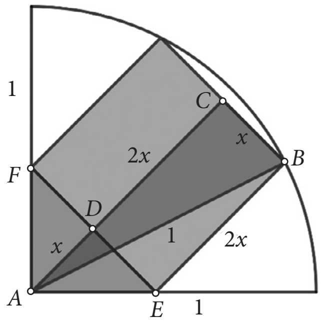
pa je $p = ab = \left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 - 2 = 7$.

Tražena površina pravokutnika je 7.

Primjer 3. Kolika je površina kvadrata ako polumjer kružnoga isječka ima duljinu 1?



Rješenje: Istaknimo trokute *ABC* i *AEF* kako je prikazano na slici.



Trokut *AEF* je pravokutni jednakokračni. Dužina $\overline{AD}$ visina je na hipotenuzu toga trokuta. Označimo njezinu duljinu *x*. I trokut *AED* je pravokutni jednakokračni, pa je i $|DE| = |AD| = x$. Slijedi da je $|EF| = 2|DE| = 2x$, tj. stranice zadanoga kvadrata imaju duljine $2x$.

To znači da je i $|CD| = 2x$, iz čega slijedi $|AC| = 3x$.

Trokut *ABC* je pravokutan, a njegove katete imaju duljine $|AC| = 3x$ i $|BC| = x$, dok je hipotenuza $\overline{AB}$ polumjer kružnoga isječka pa je $|AB| = 1$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut *ABC* dobiva se

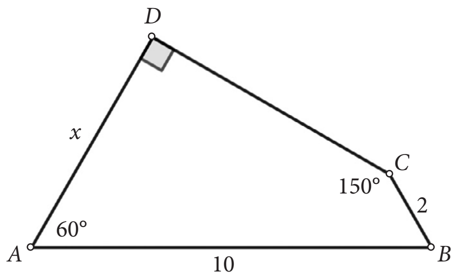
$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2,$$

tj. $(3x)^2 + x^2 = 1^2$.

Dakle,
$$9x^2 + x^2 = 1$$
$$10x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{10}$$

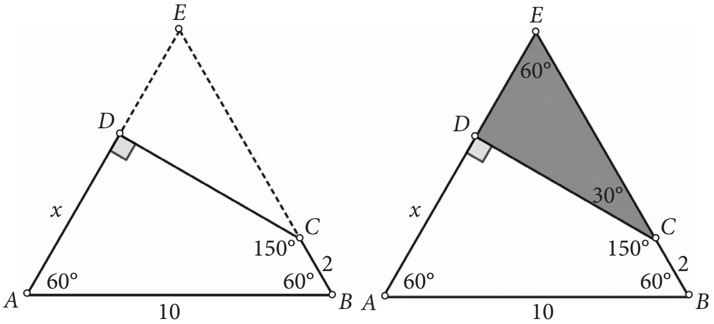
Slijedi da je površina kvadrata $p = (2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

Primjer 4. Kolika je duljina stranice $\overline{AD}$ četverokuta *ABCD*?



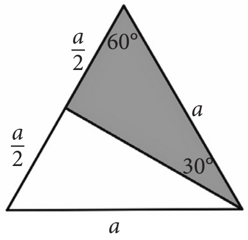
Rješenje: Najprije se može izračunati veličina kuta $\angle CBA$. Zbroj unutarnjih kutova u svakome četverokutu iznosi 360° pa je $|\angle CBA| = 360° - 60° - 150° - 90° = 60°$.

Četverokut *ABCD* ima dva kuta od 60°, što znači da se može dopuniti do jednakostraničnoga trokuta.



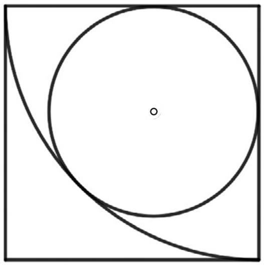
Dobiva se jednakostranični trokut *ABE* kojemu sve stranice imaju duljinu 10, a pritom je $|\angle AEB| = 60°$.

To znači da je istaknuti trokut *CED* pravokutan kojemu šiljasti kutovi imaju veličine 30° i 60°. Za takav trokut vrijedi da je hipotenuza dvostruko dulja od kraće katete, tj. $|CE| = 2|DE|$, jer on je polovica jednakostraničnoga trokuta.



Iz $|AE| = |BE| = 10$ slijedi da je $|CE| = 10 - 2 = 8$, a $|DE| = \frac{1}{2}|CE| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Stoga je $|AD| = |AE| - |DE| = 10 - 4 = 6$, i to je tražena duljina *x*.

Zadatak 1. U kvadrat stranice duljine 2 cm upisan je krug najveće moguće površine, kako je prikazano na slici. Kolika je površina toga kruga?



Izvori:

1. https://www.youtube.com/channel/UCJok4N-aJSFTl63LJ16o9VQ
2. https://www.youtube.com/channel/UCHnj59g7jezwTy5GeL8EA_g
3. https://www.youtube.com/channel/UCXGlEEb1ULN6EGBlk3g1n1w