Matka 30 (2021./2022.) br. 120

TUCET ZADATAKA IZ PROŠLOSTI

Sanja Sruk, Zagreb

Tucet je stara mjera koja označava 12 komada nečega. Danas se u našim krajevima više ne koristi, dok je u zemljama engleskog govornog područja još uvijek u upotrebi, iako sve rjeđe. Ipak neke predmete, primjerice pribor za jelo, u trgovinama nalazimo u kompletima koji se sastoje od dvanaest ili šest (pola tuceta) komada. I dok riječ *tucet* pripada prošlosti, zadatci koji slijede potječu iz prošlosti, ali mnogi od njih i dalje svojom zanimljivošću privlače matematičare.

1. Mačke, miševi…

Na imanju je sedam kuća. U svakoj od njih sedam je mačaka. Svaka od mačaka uhvati po sedam miševa, a svaki od njih pojede po sedam zrna pšenice. Svako bi zrno moglo dati sedam mjerica žita. Koliko je na imanju ukupno kuća, mačaka, miševa, zrna pšenice i mjerica žita?

Ovaj zadatak potječe iz drevnog Egipta, a zapisan je na Rhindovu papirusu, najznačajnijem dokumentu koji svjedoči o bogatstvu egipatske civilizacije. Pronađen je u Luksoru 1858. godine, a potječe iz razdoblja oko 1650. godine prije Krista. Kasnije su se javljale razne varijante ovoga zadatka. Ovo je jedna od njih: „Sedam starih žena putuje u Rim. Svaka od njih ima sedam mula. Svaka mula nosi sedam vreća. U svakoj je vreći sedam kruhova. Uz svaki je kruh sedam noževa. Svaki je nož u sedam korica. Koliko je svega na putu u Rim: žena, mula, vreća, kruhova, noževa i korica?”. U Hrvatskoj se pojavila varijanta zadatka u stihu:

„Kad sam išao brinje brati,
Kraj mene prođoše čudni svati,
Mladoženja se žalosno klimao,
Sedam je žena jadnik imao.
Svaka je bila od njega veća,
Svaka je nosila po sedam vreća.
Vreće su bile od kozje dlake,
Sedam je mačaka mijaukalo iz svake.
I nijedna mačka nije ispala,
A svaka je po sedam mačića imala.
Mačići, mačke, vreće i žene,
Koliko je nogu prošlo pored mene?“

2. Površina kvadrata

Površina kvadrata od 100 kvadratnih kraljevskih lakata (jedan kraljevski lakat iznosi 52.4 cm) jednaka je zbroju površina dvaju manjih kvadrata. Duljina stranice jednog od tih dvaju kvadrata jednaka je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ drugog. Kolike su duljine stranica tih kvadrata?

O rješavanju kvadratnih jednadžbi u starom Egiptu doznajemo iz *Berlinskog papirusa* koji potječe iz otprilike 1800. godine prije Krista. U njemu se nalazi i ovaj zadatak. Papirusi sadrže i matematičke probleme iz kojih je vidljivo da su imali dobre približne formule za izračunavanje volumena kugle i drugih geometrijskih tijela. Iako nisu bile potpuno točne, za njihove praktične potrebe bile su posve zadovoljavajuće. U zapisima ne nalazimo konkretne formule, nego „recepte", upute koje treba slijediti korak po korak kako bi se nešto izračunalo, bez obrazloženja zašto je to tako. To ne znači da egipatski matematičari nisu znali obrazložiti svoje postupke. Vjerojatnije je da su smatrali da obrazloženja nisu potrebna jer su te upute uglavnom bile namijenjene običnim ljudima (trgovcima, graditeljima...). Ako vas je začudilo zašto u zadatku piše da je stranica jednog kvadrata $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ drugog, a ne jednostavno $\frac{3}{4}$ drugog, to je zato što su Egipćani razlomke prikazivali u obliku zbroja razlomaka kojima je brojnik 1. Izuzetak je jedino razlomak $\frac{2}{3}$ koji je imao poseban hijeroglifski znak.

3. Prijelaz preko rijeke

Čovjek mora preko rijeke prevesti vuka, kozu i kupus. U čamac stane samo čovjek, a s njim ili vuk, ili koza, ili kupus. Ali ako ostavi vuka samog s kozom, tada će vuk pojesti kozu, a ako ostavi kozu samu s kupusom, tada će koza pojesti kupus. Koliko najmanje puta treba prijeći rijeku kako bi sve prevezao na drugu obalu?

Vjerojatno ste već čuli ovu mozgalicu. Pronađena je u zapisima iz 8. stoljeća, ali je i danas jako popularna. Ne zahtijeva računanje, već logičko razmišljanje, a budući da je logičko razmišljanje karakteristika svih dobrih matematičara, sigurna sam da ćete pronaći rješenje. Razmislite je li rješenje jedinstveno.

4. Mango i šipak

Ako se na tržnici može kupiti 300 manga za jednu *drammu*, a 30 zrelih šipaka za jednu *panu*, reci mi brzo, moj mali prijatelju, koliko šipaka mogu dobiti u zamjenu za deset manga? (1 dramma = 16 pana)

Indijskoj civilizaciji zahvaljujemo na posebnim znakovima za brojeve od nula do devet. Do 7. stoljeća nula se nije shvaćala kao broj, a prvi ju je spomenuo indijski matematičar **Brahmagupta**. Zadatak s mangom i šipkom pronađen je u indijskoj knjizi *Lilavati* iz 12. stoljeća. Autor je **Bhaskara II**., a naslov knjige ime je njegove kćeri.

5. Lopoči

Trećinu lopoča dao sam Shivi, petinu Vishnu, šestinu je dobio Surya, a četvrtinu Devi. Preostalih šest lopoča dao sam svećeniku. Koliko sam imao lopoča?

Imena koja se spominju u ovom zadatku susrećemo u hinduističkoj mitologiji. Shiva je bog uništavatelj, Vishnu stvaratelj i zaštitnik svemira, Surya bog sunca, a Deva (muško) i Devi (žensko) natprirodno biće. I ovaj zadatak je iz knjige *Lilavati*.

6. Zečevi i fazani

Seljak uzgaja zečeve i fazane. Ove životinje zajedno imaju 35 glava i 94 noge. Koliko je fazana, a koliko zečeva?

Kina je poznata kao iznimno napredna civilizacija s bogatom kulturnom tradicijom. Kinezi su izumitelji papira, baruta, kompasa, tiska (puno prije Gutenberga), pogona lančanim prijenosom, lančanih visećih mostova... Najstarija sačuvana djela o matematici su im *Sveta knjiga o aritmetici* i *Aritmetika u devet poglavlja* (ili *Devet poglavlja umijeća računanja*). Prva knjiga sadržava rasprave o kalendaru, astronomiji, matematici i filozofiji i iz nje se može zaključiti da su Kinezi već tada poznavali Pitagorin poučak. Zadatak s fazanima i zečevima spominje se u *Aritmetici u devet poglavlja*, a danas ga možemo pronaći u mnogim matematičkim udžbenicima.

7. Uže oko zemlje

Zamislite da je Zemlja glatka kugla i da je oko ekvatora, čija je duljina oko 40 000 km, postavljeno uže. Za koliko bi se trebala povećati duljina užeta ako ga želimo podignuti na visinu 1 m iznad ekvatora?

Engleski matematičar, teolog i povjesničar **William Whiston** postavio je sličan zadatak 1702. godine. Pokušajte prvo procijeniti, a zatim izračunajte. Vjerujem da će vas rezultat jako iznenaditi.

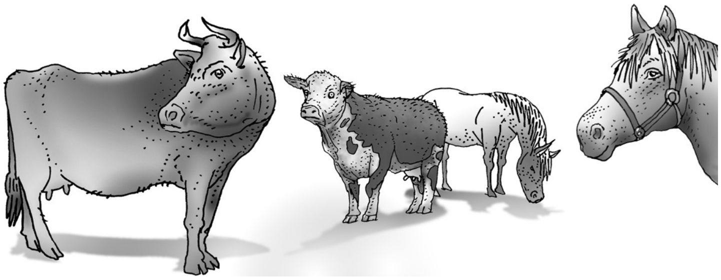
8. Goveda i pašnjaci

U 4 tjedna 12 goveda pojede $3\frac{1}{3}$ jutara pašnjaka, a u 9 tjedana 21 govedo pojede 10 jutara pašnjaka. Ako trava raste uvijek jednakom brzinom, koliko će goveda trebati da pojedu 24 jutra pašnjaka u razdoblju od 18 tjedana?

Isaac Newton, engleski matematičar, fizičar i astronom, jedan je od najvećih i najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Sigurno ste čuli priču kako je zahvaljujući padu jabuke sa stabla otkrio gravitaciju. Ovaj nimalo jednostavan zadatak objavio je u svojoj knjizi *Univerzalna aritmetika* 1720. godine.

9. Konji i bikovi

Trgovac kupuje nekoliko konja i bikova za iznos od 1770 talira. Platio je 31 talir za svakog bika i 21 talir za svakog konja. Koliko bikova i konja kupuje trgovac?



Leonhard Euler još jedno je ime koje trebate zapamtiti. On je bio švicarski matematičar iz 18. stoljeća. Bavio se gotovo svim matematičkim disciplinama koje su u njegovo vrijeme bile poznate i svima je dao značajan doprinos, a postavio je i temelje nekih novih disciplina kao što su teorija grafova i analitička teorija brojeva. On je autor ovog zadatka koji će vam, pretpostavljam, biti prilično težak. Svodi se na tzv. diofantsku jednadžbu (jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima i rješenjima), a Euler je također razvio metodu za rješavanje ovakvih jednadžbi.

10. 100 ptica

Jedan pijetao košta 5 novčića, jedna kokoš 3, a tri pilića zajedno 1 novčić. Ako je kupljeno 100 ptica za 100 novčića, koliko je kojih kupljeno?

Slično kao i prethodni, ovaj zadatak može se svesti na sustav diofantskih jednadžbi. Potječe iz već spomenute kineske knjige *Devet poglavlja umijeća računanja* iz razdoblja između 200. i 300. godine prije Krista. Slični zadatci pojavljivali su se u kasnijim razdobljima u raznim kulturama. Evo nekoliko primjera:

- Neki čovjek htio je kupiti 100 životinja za 100 dinara. Želio je platiti tri dinara po konju, jedan dinar po kravi i jedan dinar za 24 ovce. Koliko je konja, krava i ovaca bilo?
- Neki čovjek želio je kupiti 100 životinja. Naredio je svome sluzi da plati pet dinara po devi, jedan dinar po magarcu i jedan dinar za 20 ovaca. Koliko je deva, magaraca i ovaca kupljeno za 100 dinara?

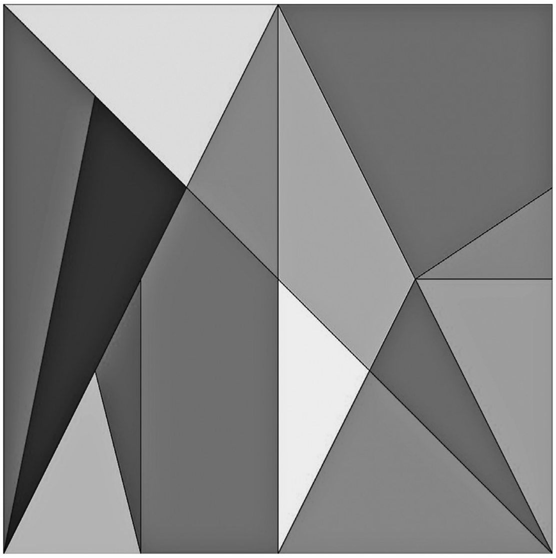
– Tri goluba prodaje se za 5 novčića, 5 saras ptica za 7 novčića, 7 labudova za 9 novčića i 9 paunova za 3 novčića. Naređeno je da se doveze 100 ptica za 100 novčića za zabavu kraljevskoga sina. Koliko je plaćeno za svaku vrstu ptice koja je kupljena?

11. Masa kamena

Pronašao sam kamen, ali ga nisam izvagao. Nakon toga dodao sam jednu sedminu njegove mase, a zatim i jednu jedanaestinu cjelokupne mase te je tada težio 1 minu (1 mina = 60 gina). Kolika je masa kamena u ginima?

Čudan neki čovjek, zar ne? Umjesto da odmah izvaže kamen, on mu dodaje sedminu mase, pa jedanaestinu. Ipak, ovaj zadatak nije nam težak, ali starim Babiloncima ovo nije bilo baš tako jednostavno. Njihov brojevni sustav imao je bazu 60, a u tom sustavu računanje je kompliciranije nego u našem sustavu s bazom 10. Samo za tablicu množenja treba znati sve umnoške od $1 \cdot 1$ do $59 \cdot 59$, pa su zato imali posebne tablice koje su im služile kao pomoć u računanju. Zadatak je pronađen na jednoj od mnogobrojnih glinenih pločica koje su se koristile za pisanje i računanje u Mezopotamiji i Babilonu.

12. Arhimedov stomachion



Volite li slagalice (puzzle)? Autor najstarije poznate slagalice je **Arhimed**, grčki matematičar iz 3. stoljeća prije Krista. Opisana je u rukopisu iz 10. stoljeća koji nosi *naslov Arhimedov palimpsest* i u njemu se nalaze mnoga Arhimedova djela. Palimpsest je naziv za rukopis na papirusu ili pergamentu s kojega je izbrisan prvotni tekst i na njegovu mjestu napisan novi. Nekoć su znanstvenici uspijevali doći do prvotnih tekstova upotrebom različitih kemikalija, no tako se oštećivao rukopis. Danas se primjenjuju fotografije s pomoću ultraljubičastih zraka. Mnogi su palimpsesti važni za znanost jer su na njima pronađeni nepoznati stari tekstovi. Malo je vjerojatno da je Arhimed svoj *stomachion* (kvadrat podijeljen na 14 dijelova kao na slici) sastavio radi zabave i razonode, već mu je vjerojatnije služio za rješavanje nekog geometrijskog problema. Ali to ne znači da se vi ne možete njime zabaviti. Precrtajte, izrežite i pokušajte ponovno složiti kvadrat.

Ako volite rješavati razne mozgalice, potražite knjigu *Matematički problemi za radoznalce* autora Mirka Polonija ili prošećite prostranstvima interneta u potrazi za zanimljivim matematičkim zadatcima.

Rješenja zadataka

1. Broj kuća: 7, broj mačaka: 7 · 7 = 49, broj miševa: 49 · 7 = 343, broj zrna: 343 · 7 = 2 401, Broj mjerica žita: 2401 · 7 = 16 807, Ukupno: 7 + 49 + 343 + 2 401 + 16 807 = 19 607

2. Stranica prvog manjeg kvadrata: x, stranica drugog manjeg kvadrata: $y=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x=\frac{3}{4}x$. Zbroj površina kvadrata tada je $x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=100$, a dalje je redom $x^2+\frac{9}{16}x^2=100$, $\frac{25}{16}x^2=100$ odakle je $x^2 = 64$ pa je $x = 8$, a $y = 6$. Stranice tih kvadrata su 8 i 6 lakata.

3. Prvi prijelaz: čovjek i koza; Drugi prijelaz: čovjek se sam vraća; Treći prijelaz: čovjek i vuk; *Četvrti prijelaz: čovjek se vraća s kozom*; Peti prijelaz: čovjek i kupus; *Šesti prijelaz: čovjek se sam vraća*; Sedmi prijelaz: čovjek i koza.
Potrebno je najmanje sedam prijelaza preko rijeke. Postoji još jedno rješenje. Koje?

4. 300 manga košta 1 drammu, odnosno 16 pana. Budući da za 1 panu možemo dobiti 30 šipaka, za 16 pana možemo dobiti 30 · 16 šipaka. Dakle, za 300 manga možemo dobiti 30 · 16 šipaka, pa onda za deset manga možemo dobiti 30 puta manje, tj. 16 šipaka.

5. Broj lopoča: x. Vrijedi jednadžba: $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x+6=x$. Nakon množenja sa 60 jednadžba poprima oblik $20x + 12x + 10x + 15x + 360 = 60x$, odnosno $57x + 360 = 60x$, što znači da je $x = 120$. Bilo je 120 lopoča.

6. Ako broj zečeva označimo z, a broj fazana f, dobivamo sljedeće dvije jednadžbe:
$z + f = 35$ (jer svaka životinja ima jednu glavu)
$4z + 2f = 94$ (jer zečevi imaju 4, a fazani 2 noge).
Rješavanjem sustava dolazimo do rješenja: $z = 12$, $f = 23$, dakle seljak ima 12 zečeva i 23 fazana.

7. Ako želimo postaviti uže oko ekvatora, njegova duljina mora biti jednaka duljini ekvatora, dakle 40 000 km, odnosno 40 000 000 m. Pomoću formule za opseg kruga $o = 2r\pi$ mogli bismo izračunati polumjer, uvećati ga za 1 m, a zatim izračunati novi opseg i vidjeti za koliko je veći od opsega Zemlje. Primijetite da ipak ne moramo tako računati. Ako s r označimo polumjer Zemlje u metrima, onda je njen opseg $o = 2r\pi$. Povećamo li polumjer za 1 m, novi opseg računamo $o_1 = 2(r+1)\pi = 2r\pi + 2\pi = o + 2\pi$. Dakle, uže treba biti dulje za samo 2π metra, odnosno oko 6.28 m. Štoviše, isti rezultat ćemo dobiti ako uže postavimo oko obične male lopte, a zatim ga odmaknemo od površine lopte za 1 m. Produljenje će opet iznositi 6.28 m. Nevjerojatno, zar ne?

8. Uvedimo oznake: x – *početna količina trave*; y – količina trave koju jedno govedo pojede u jednom tjednu; z – količina trave koja izraste za jedan tjedan na jednom jutru pašnjaka; g – nepoznat broj goveda. Prvi podatak daje nam jednadžbu: $\frac{10}{3}(x+4z)=12\cdot 4y$, drugi podatak daje nam jednadžbu: $10(x+9z)=21\cdot 9y$, a pitanje nam daje treću jednadžbu: $24(x+18z)=g\cdot 18y$. Podijelimo li prve dvije jednadžbe, dobit ćemo $\dfrac{\frac{10}{3}(x+4z)}{10(x+9z)}=\dfrac{12\cdot 4y}{21\cdot 9y}$, a nakon malo sređivanja $5x = 60z$, odnosno $x = 12z$. Uvrstimo li x u jednu od prve dvije jednadžbe, npr. u drugu, dobivamo: $10(12z + 9z) = 21 \cdot 9y$, iz čega proizlazi da je $y=\frac{10}{9}z$. Konačno dobiveni x i y uvrstimo u treću jednadžbu pa dobivamo $24(12z+18z)=g\cdot 18\cdot\frac{10}{9}z$. Sad lako dolazimo do rezultata $g = 36$. Dakle, 36 goveda pojest će 24 jutra pašnjaka u razdoblju od 18 tjedana.

9. Označimo li broj bikova s b, a broj konja s k, dobit ćemo jednadžbu $31b + 21k = 1770$. To je jednadžba s dvije nepoznanice i ona općenito ima beskonačno mnogo rješenja, ali naša rješenja moraju biti prirodni brojevi. Eulerova metoda sastoji se u tome da odabere nepoznanicu uz koju stoji manji koeficijent (što je u ovom slučaju k) i ostale brojeve zapiše u obliku zbroja višekratnika tog koeficijenta i prirodnog broja, ovako: $31 = 1 \cdot 21 + 10$, $1770 = 84 \cdot 21 + 6$.

Sada je $k = \frac{-31b + 1770}{21} = \frac{-21b - 10b + 84 \cdot 21 + 6}{21} = -b + 84 + \frac{-10b + 6}{21}$. Broj k je prirodan pa je onda i broj $\frac{-10b+6}{21}$ prirodan. Označimo li ga s t, vrijedi: $-10b + 6 = 21t$, odnosno $b = \frac{-21t + 6}{10} = \frac{-2 \cdot 10t - t + 6}{10} = -2t + \frac{-t+6}{10}$. I broj b je prirodan pa je onda i broj $\frac{-t+6}{10}$ prirodan. Označimo li taj broj s u, dobit ćemo: $-t + 6 = 10u$, odnosno $t = -10u + 6$.

Dalje je $b = -2t + u = -2(-10u + 6) + u = 21u - 12$, pa je $k = -b + 84 + t = -21u + 12 + 84 - 10u + 6 = -31u + 102$. Brojevi b i k moraju biti pozitivni, tj. $21u - 12 > 0$ i $-31u + 102 > 0$, a to znači da u mora biti veći od $\frac{21}{12}$ i manji od $\frac{102}{31}$, a također mora biti prirodan pa u obzir dolaze brojevi 1, 2 i 3. Imamo tri moguća rješenja:

za $u = 1$ dobivamo $b = 9$, $k = 71$; za $u = 2$ dobivamo $b = 30$, $k = 40$; a za $u = 3$ dobijemo $b = 51$, $k = 9$.

10. Označimo li broj pijetlova s x, broj kokoši s y, a broj pilića sa z, dobivamo sustav jednadžbi:

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$
$$x + y + z = 100$$

Iz druge jednadžbe izrazimo x pa dobivamo $x = 100 - y - z$, a zatim uvrstimo u prvu jednadžbu te dobivamo $5(100 - y - z) + 3y + \frac{1}{3}z = 100$. Nakon sređivanja dobivamo $y = 200 - \frac{7}{3}z$. Onda je $x = 100 - \left(200 - \frac{7}{3}z\right) - z = -100 + \frac{4}{3}z$. Brojevi x i y moraju biti veći od 0, tj. $200 - \frac{7}{3}z > 0$ i $-100 + \frac{4}{3}z > 0$, odnosno $z > 75$ i $z < \frac{600}{7}$. Broj z mora biti prirodan pa u obzir dolaze brojevi iz skupa {76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85}. Ipak ne moramo provjeravati svih deset mogućih brojeva jer broj z mora biti djeljiv brojem 3 pa u obzir dolaze brojevi 78, 81 i 84. Imamo tri rješenja:

Ako je $z = 78$, onda je $x = 4$, $y = 18$. Za $z = 81$ dobivamo $x = 8$ i $y = 81$, a za $z = 84$ dobivamo $x = 12$, $y = 4$.

11. Ako je masa kamena x, vrijedi jednadžba: $x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x + \frac{1}{7}x\right) = 60$. Nakon sređivanja dolazimo do rješenja $x = 48\frac{1}{8}$ gina.