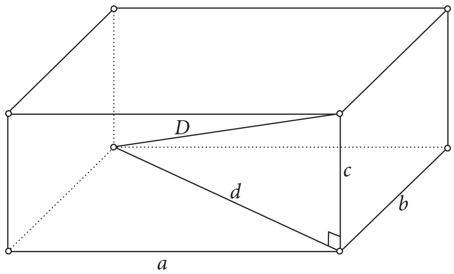
# NEKE NEJEDNAKOSTI KVADRA

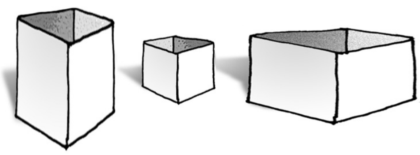
Šefket Arslanagić i Daniela Zubović, Sarajevo

U ovom članku bit će govora o nekim zanimljivim nejednakostima koje se odnose na kvadar. Kvadar je uspravna četverostrana prizma omeđena s tri para međusobno sukladnih pravokutnika.

Označimo li s $a$, $b$ i $c$ duljine bridova kvadra, s $d$ duljinu plošne dijagonale njegove baze, a s $D$ duljinu prostorne dijagonale toga kvadra, tj. uz oznake kao na slici, vrijede sljedeće formule (Slika 1.):




*Slika 1.*



$$O = 2(ab + bc + ac), \tag{1}$$

$$V = abc, \tag{2}$$

$$d^2 = a^2 + b^2, \tag{3}$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{4}$$

Dat ćemo više primjera nejednakosti za čije ćemo dokaze koristiti gornje formule, neke od poznatih nejednakosti kao i ostale važne osobine nejednakosti.

**Primjer 1**. Odredimo najveće oplošje koje može imati kvadar čija je duljina prostorne dijagonale jednaka $m$.

***Rješenje***: Označimo li s $x$, $y$ i $z$ duljine bridova kvadra, tada je njegovo oplošje $O$ prema (1)

$$O = 2(xy + yz + xz).$$

Očigledno (zbog $(x-y)^2 \geq 0$ ) vrijedi da je

$$x^2 + y^2 \geq 2xy;\ \ y^2 + z^2 \geq 2yz;\ \ x^2 + z^2 \geq 2xz.$$

Zbrojimo li te nejednakosti, dobit ćemo da je

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz). \tag{5}$$

Budući da prema (4) vrijedi da je $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$, iz (5) slijedi da je $2(xy + yz + xz) \leq 2m^2$, tj. $O \leq 2m^2$.

Prema tome, najveće oplošje je $2m^2$.

**Primjer 2**. Može li se napraviti kutija u obliku kvadra čiji je volumen jednak 0.4 $m^3$ ako je zbroj njenih triju dimnezija (duljina njenih bridova) jednak 2 m?

***Rješenje**:* Neka su dimnezije kutije $a$, $b$, i $c$, pri čemu vrijedi da je $a + b + c = 2$ m. Tada iz (2) vrijedi da je $abc = 0.4$ $m^3$. S obzirom na nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine $A \geq G$ za tri pozitivna broja $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{0.4} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} .$$

Nakon kubiranja ove nejednakosti dobivamo $\frac{8}{27} \geq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 20 \geq 27$, što nije točno. Prema tome, tražena se kutija ne može napraviti.

**Primjer 3**. Dokažimo da vrijedi:

a) Oplošje kocke manje je od oplošja kvadra istog volumena.
b) Volumen kocke veći je od volumena kvadra istog oplošja.

***Rješenje**:* a) Koristeći već spomenutu nejedankost ($A > G$) dobivamo:

$$\frac{ab+bc+ac}{3} > \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}\text{, tj.}$$

$$\frac{ab+bc+ac}{3} > \sqrt[3]{(abc)^2}. \tag{6}$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer u kvadru duljine bridova $a$, $b$ i $c$ nisu međusobno jednake. (Inače se jednostavno dokazuje da u nejednakosti $A \geq G$, tj. $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, $(x, y, z > 0)$ jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$).
Ako je $k$ duljina brida kocke, prema uvjetu u zadatku vrijedi:

$$k^3 = abc.$$

Sada iz (6) slijedi da je

$$\frac{ab+bc+ac}{3} > \sqrt[3]{k^6} ,$$

odnosno $ab+bc+ac > 3k^2$, a odavde je $6k^2 < 2(ab+bc+ac)$, što je i trebalo dokazati.

b) Prema dokazanom u a) zadatku dobivamo da je $ab + bc + ac > 3k^2$, pa iz nejednakosti (6) redom dobivamo da je

$$(ab+bc+ac)^3 > 27(abc)^2 ,$$

tj. $(3k^2)^3 > 27(abc)^2$, odnosno $27k^6 > 27(abc)^2$, tj. $k^3 > abc$, što je i trebalo dokazati.

**Primjer 4**. Dokažimo nejednakost

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq abcD\sqrt{3},$$

gdje su *a*, *b* i *c* duljine bridova kvadra, a *D* duljina njegove prostorne dijagonale.

***Rješenje***: Iz očigledne nejednakosti

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0;\ (x,y,z\in\mathbb{R})$$

nakon kvadriranja dobiva se nejednakost $2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+xz)$, odnosno

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz, \tag{7}$$

a odavde je $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \geq 3(xy+yz+xz)$

ili

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz), \tag{8}$$

gdje su $x,y,z\in\mathbb{R}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

Uvrstimo li u (8) da je $x=(ab)^2$, $y=(bc)^2$ i $z=(ac)^2$, dobivamo

$$\left[(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2\right]^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2),$$

odnosno zbog (4):

$$(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2D^2.$$

Nakon korjenovanja dobivamo $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq abcD\sqrt{3}$, što je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. kada je u pitanju kocka.

**Primjer 5**. Ako su *a*, *b*, *c* duljine bridova i *O* oplošje kvadra, dokažimo da vrijedi nejednakost

$$O \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

***Rješenje***: Iz dokazane nejednakosti (7), tj. $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost $2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+xz)$. Dalje je

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \text{, tj.}$$

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

ili

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2. \tag{9}$$

Nadalje je:

$$O=2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2). \tag{10}$$

Množeći nejednakost (9) brojem -1, dobivamo nejednakost

$$-(x^2+y^2+z^2) \leq -\frac{1}{3}(x+y+z)^2. \tag{11}$$

Iz nejednakosti (10) zbog nejednakosti (11) slijedi $O \le (a+b+c)^2 - \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ ili $O \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2$, što je trebalo i dokazati.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$ kada je u pitanju kocka, tj. $O = 6a^2$.

**Primjer 6**. Neka su $a$, $b$, $c$ duljine bridova kvadra, a $D$ duljina njegove prostorne dijagonale. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c) \le D < a+b+c\,.$$

**Rješenje**: $1^0$ Iz (4) na temelju dokazane nejednakosti (9) dobivamo $D^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, a nakon korjenovanja dobivamo redom:

$$D \ge \sqrt{\frac{1}{3}}(a+b+c),\ \text{tj.}\ D \ge \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\ \text{ili}\ D \ge \frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c).$$

$2^0$ Da bismo dokazali drugi dio nejednakosti iz ovog primjera, označimo s $d$ dijagonalu donje strane, tj. pravokutnika kojemu su bridovi duljine $a$ i $b$ (Slika 1.). Koristeći nejednakost trokuta, dobit ćemo:

$$D < d + c \ \text{ i } \ d < a + b,$$

pa je $D < a + b + c$, što je trebalo i dokazati.

Iz dokazanih tvrdnji $1^0$ i $2^0$ slijedi dana nejednakost.

Jednakost na lijevoj strani dane nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. kada je u pitanju kocka, tj. $D = a\sqrt{3}$.

**Primjer 7**. Ako je $O$ oplošje i $V$ volumen kvadra, dokažimo da vrijedi nejednakost $O \ge 216V^2$.

**Rješenje**: S obzirom na to da je $O = 2(ab+bc+ac)$ i $V = abc$, prema nejednakosti za aritmetičku ($A$) i geometrijsku ($G$) sredinu koja glasi $A \ge G$, dobivamo:

$$\frac{ab+bc+ac}{3} \ge \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ac},\ \text{tj.}\ ab+bc+ac \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,.$$

Nakon kubiranja je

$$(ab+bc+ac)^3 \ge 27a^2b^2c^2$$

ili $\left(\frac{O}{2}\right)^3 \ge 27V^2$, tj. $O^3 \ge 8\cdot 27V^2$, odnosno $O^3 \ge 216V^2$, što je i trebalo dokazati.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. kada je u pitanju kocka, te $O = 6a^2$, $V = abc$.

## Literatura:


1. Arslanagić, Š. 2012. *Matematika za 9. razred osnovne škole*. Dječija knjiga. Bosanska riječ. Sarajevo.
2. Mitrinović, D. S., Vasić, P. M., Đorđević, P. M., Janić R. R. 1966. *Priručnik za takmičenja srednjoškolaca u matematici, II, Geometrijske nejednakosti*. Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije. Beograd.
3. Palman, D. 2005. *Stereometrija*. Element. Zagreb.