LINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Filip Nikolić, XV. gimnazija, Zagreb

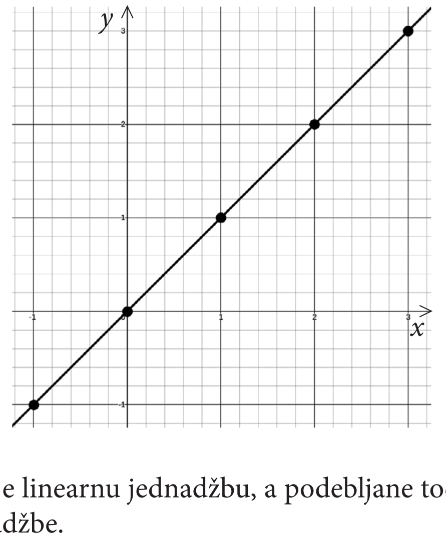
Ako imamo zadanu jednadžbu $y = x$, onda je graf te jednadžbe skup svih točaka $T(x, y)$ u koordinatnom sustavu koje je zadovoljavaju. Ako je točka $T_1(2, 2)$, onda ona pripada grafu jednadžbe jer je $2 = 2$. Točka $T_2(2, 3)$ ne pripada grafu jednadžbe jer $3 \neq 2$. Točka $T_3(0.5, 0.5)$ također pripada grafu jednadžbe. Ako bismo provjerili svaku točku ravnine s ovom jednadžbom, dobili bismo skup točaka koje čine pravac, pa je graf jednadžbe pravac.

U primjeru smo vidjeli da točka $T_3(0.5, 0.5)$ pripada jednadžbi, ali što ako bismo htjeli da rješenja budu samo cjelobrojna? Drugim riječima, da točke (1,1), (−1 −1), (123, 123) pripadaju, ali da točke (0.5, 0.5), (12.34, 12.34), (82.3, 82.3) ne pripadaju rješenjima jednadžbe?

Kako bismo to ostvarili, potrebne su nam diofantske jednadžbe, u ovom slučaju linearne diofantske jednadžbe.

U diofantskim jednadžbama rješenja su uvijek cijeli brojevi: $x, y \in \mathbf{Z}$.

Primjer 1.



$y = x$

Pravac prikazuje linearnu jednadžbu, a podebljane točke prikazuju rješenja diofantske jednadžbe.

Primjećujemo da su rješenja diofantske jednadžbe ujedno i točke pravca $y = x$.

Lako je vidjeti diofantska rješenja ako nacrtamo graf linearne jednadžbe, ali je li to praktično? Je li moguće dobiti rješenja isključivo računski? Da, naravno da je moguće.

Možemo osmisliti varijablu n koja će biti cijeli broj: $n \in \mathbf{Z}$. Možemo reći da nam x bude jednak n:
$x = n$. Iz zadane jednadžbe vidimo da je y jednak x pa je onda y jednak n:
$y = n$. Dobili smo rješenje diofantske jednadžbe koje zapisujemo ovako:
$x = n, y = n, n \in \mathbf{Z}$

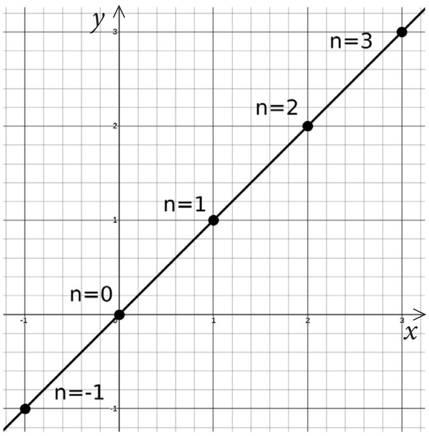
Rješenja su svi uređeni parovi (x, y), tj. rješenja su svi uređeni parovi (n, n), $n \in \mathbf{Z}$. Ako je n cijeli broj, onda su x i y cijeli brojevi, što znači da su sva rješenja cjelobrojna.

Neko od rješenja možemo dobiti tako da zadamo neki broj n.
Primjer računa:

$n = 0$
$x = n = 0$
$y = n = 0$
$T(x, y) = (0, 0)$

$n = 1$
$x = 1$
$y = 1$
$T(1, 1)$

$n = -1$
$x = -1$
$y = -1$
$T(-1, -1)$



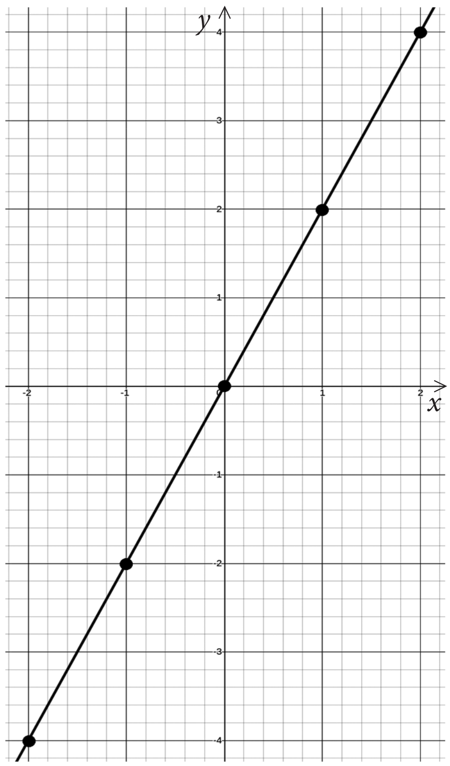
Možemo primijetiti da je varijabla n nešto kao redni broj točke gdje prva točka ima redni broj 0, sve vrijednosti desno od nje imaju pozitivan redni broj, a sve lijevo imaju negativan redni broj.

Primjer 2.

Primjer 1 bio je dosta lagan, ali ograničen.
Što ako želimo promijeniti nagib pravca?
Što ako je $y = ax$?

$y = 2x$

Opet možemo reći da je $x = n$.
Ali ovaj je put $y = 2n$.
Do toga smo došli iz svojstva nagiba pravca:
ako x povećamo za 1, onda će se y promijeniti za a.
U ovom slučaju, ako x povećamo za 1, y će narasti za 2.
Vrijedi i obratno; ako x smanjimo za 1, y će se smanjiti za 2.

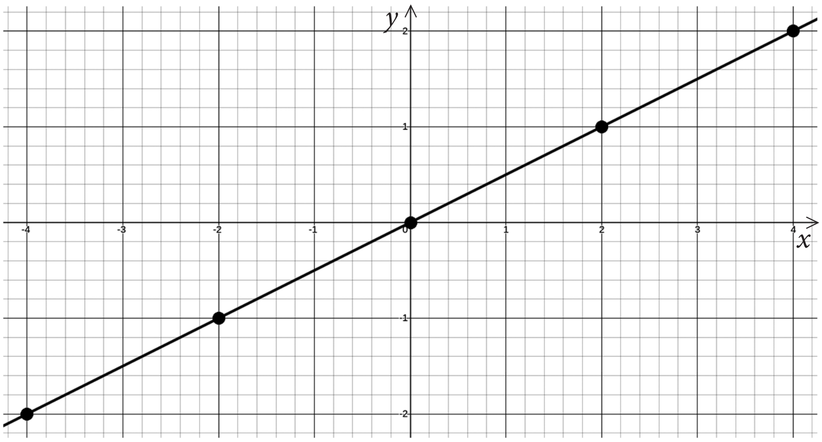


$x = n, y = 2n, n \in \mathbf{Z}$
Diofantska rješenja ove jednadžbe su svi uređeni parovi $(n, 2n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Primjer 3.

Što ako nagib nije cijeli broj?

$y = \dfrac{1}{2}x$



U ovom primjeru možemo primijeniti istu metodu kao u primjeru 2: ako x povećamo za 1, y će se povećati za 0.5.

$x = n$
$y = 0.5 \cdot n$

Ali, upravo množimo cijeli broj s racionalnim, onda y nije uvijek cijeli pa to ne može biti diofantsko rješenje!

Možemo se zapitati koliki x treba biti da bi desna strana jednadžbe $y = \dfrac{1}{2}x$ bila cijeli broj.

x može biti 0 (jer je $\dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$), 2 (jer je $\dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$), 4, 6, 8, 10...

x treba biti višekratnik broja 2!

Onda, umjesto da x povećavamo za 1, povećavat ćemo ga za 2; ako x povećamo za 2, onda će y narasti za 1.

$x = 2n,\ y = n,\ n \in \mathbf{Z}$

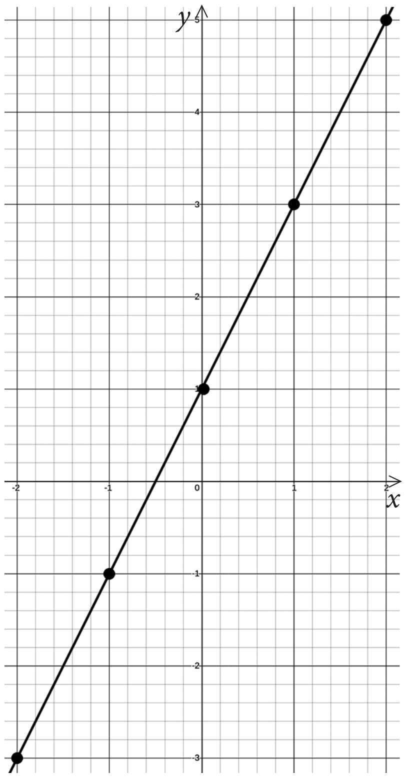
Diofantska rješenja ove jednadžbe su svi uređeni parovi $(2n, n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Primjer 4.

Dosadno je da pravac uvijek prolazi kroz ishodište (0, 0) pa smo u linearnim jednadžbama dodali koeficijent b ili odsječak na y-osi. Možemo zadati linearnu jednadžbu s koeficijentom b te odrediti sva diofantska rješenja za tu jednadžbu.

Promotrimo postupak na primjeru jednadžbe

$$y = 2x + 1.$$



Ako bismo nacrtali graf linearne jednadžbe bez odsječka na y-osi, dobili bismo pravac s nekim nagibom koji prolazi kroz ishodište. Kako bismo dobili točan pravac, podignemo ga (ili spustimo) za vrijednost odsječka na y-osi. Na slici možemo vidjeti da to vrijedi i za diofantske jednadžbe. Kako bismo riješili diofantsku jednadžbu, možemo prvo izračunati sva rješenja jednadžbe bez koeficijenta b, a zatim sve dobivene točke podignuti za 1.

U primjerima 1, 2 i 3 mi smo zapravo pokušavali dobiti nagib diofantske jednadžbe, a nagib ne ovisi o koeficijentu b, pa ga možemo ignorirati, te ga na kraju vratiti.

Jednadžba $y = 2x$ je homogena jer sadrži članove samo jednog stupnja: 1 je nulti stupanj, a je prvi stupanj, $4a$ je također prvi stupanj, ab je drugi stupanj... Homogenu smo jednadžbu dobili tako da smo od zadane maknuli b (+ 1).

Ovu (homogenu) jednadžbu već smo riješili u primjeru 2, a rješenje je:

$$x_h = n,\ y_h = 2n,\ n \in \mathbf{Z}$$

Ovo nije rješenje diofantske jednadžbe jer nismo uzeli u obzir koeficijent b.

Kao što je rečeno maloprije, koeficijent b podiže ili spušta pravac za vrijednost koeficijenta, tj. svakoj točki pravca doda vrijednost b y-koordinati. Zato ćemo svakoj y-koordinati svake točke dodati b ili u ovom slučaju 1.

$x = x_h = n,\ y = y_h + 1 = 2n + 1,\ n \in \mathbf{Z}$

Diofantska rješenja ove jednadžbe su svi uređeni parovi $(n, 2n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

I na kraju, evo nekoliko zadataka za vježbu.

Zadatci za vježbu

Nađite cjelobrojna rješenja jednadžbi:

1. $y = 4x$
2. $y = 3x - 5$
3. $y = -2x + 2$
4. $y = \dfrac{2}{3}x + 4$