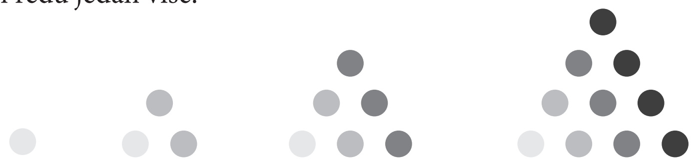
JUBILARNIH 120

Franka Miriam Brückler, Zagreb

Evo, Matka nam slavi 120 brojeva. Stotinu i dvadeset! Što misliš, ima li u matematici broj 120 ikakvo posebno značenje?

Svakako, 120 je prirodan broj, no prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. No, ističe li se ovaj broj među beskonačno mnogo njih i po čemu? Odgovor je, naravno, da!

Prvo, to je jedan od trokutastih brojeva. Trokutasti brojevi su prirodni brojevi koje si možemo predočiti slaganjem kamenčića, počevši od jednog, pa u svakom redu jedan više:



1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4
1	= 3	= 6	= 10

Ako tako nastavimo, doći ćemo do

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120.$$

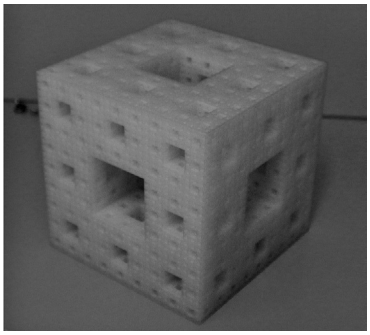
Znaš li kako brže nego jedan po jedan zbrojiti prirodne brojeve od 1 do 15 (ili do nekog drugog zadnjeg broja)? „Foru” za brzo zbrajanje otkrio je znameniti matematičar **Carl Friedrich Gauβ** (1777. – 1855.)**.** Jednog dana, dok je još bio osnovnoškolac, učitelj je njegovom razredu zadao da zbroje brojeve od 1 do 100, nadajući se da će ih time na neko vrijeme smiriti. No, mali je Gauβ već nakon nekoliko sekundi rekao točan zbroj (5050 – stoti trokutasti broj). Kako? Uočio je da ako zbrojimo prvi i zadnji, drugi i predzadnji itd. uvijek dobivamo isti zbroj: $1 + 100 = 2+ 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101$. Tako smo svih sto brojeva podijelili u pedeset parova, pa je

$$1+ 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Ako, kao u našem slučaju $1 + 2 + ... + 14 + 15$ imamo neparno mnogo brojeva, onda srednji ostaje sam, dok je ostalih pola ($15/2 = 7$) skupljeno u parove:

$$\begin{gathered}1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = \\ = (1 + 15) + (2 + 14) + (3 + 13) + (4 + 12) + (5 + 11) + (6 + 10) + (7 + 9) + 8 = \\ = 7 \cdot 16 + 8 =120.\end{gathered}$$

Kad smo već kod velikih matematičara iz povijesti, ima jedan koji bi ove godine slavio 120. rođendan, a koji je poznat po jednom znamenitom fraktalu (o fraktalima smo već pisali u Matki broj 105). Riječ je o austrijsko-americ-

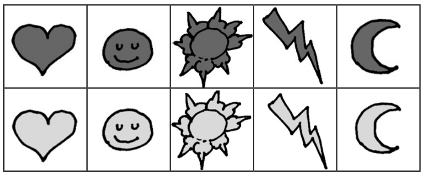


kom matematičaru **Karlu Mengeru** (1902. – 1985.) koji je osmislio Mengerovu spužvu (na slici desno njezin je model snimljen na izložbi „Volim matematiku" u Zagrebu 2015.). Mengerova spužva nastaje na sljedeći način: Krenemo od kocke. Svaku stranu kocke podijelimo na 9 kvadrata (kao na Rubikovoj kocki), tako da cijela kocka bude razrezana na 27 jednakih kockica. Uklonimo srednje kockice sa svake strane te kockicu u sredini „spužve". Dakle, uklonimo 7 kockica. Preostala je spužva s rupama podijeljena na 20 kockica. Svaku od njih kao polaznu podijelimo na 27 kockica od kojih uklonimo sredine i sredine strana. Preostale male kockice opet režemo po istom principu te opet uklanjamo iz svake njihove sredine i sredine strana. Ako bismo nastavili u beskonačnost, dobili bismo vrlo rupičastu kocku (zapravo, toliko rupičastu da joj je volumen, vjerovali ili ne, jednak 0) koju zovemo Mengerovom spužvom. Model na slici, naravno, nije prava Mengerova spužva, nego „spužva nivoa 3", tj. spužva nakon tri koraka „reži i miči".

No, uz zanimljivo svojstvo da je 120 jedan od trokutastih brojeva i da nam je jedan od matematičara rođenih prije 120 godina ostavio zanimljivu fraktalnu spužvu, 120 je vezan i za nešto što se u matematici zove *permutacije*. Radi se o prebrajanju načina da poredamo neki broj objekata u niz. Ako imamo samo jedan objekt, onda imamo samo jedan način. To pišemo: 1! = 1 (čitaj: jedna faktorijela iznosi 1). Ako imamo dva objekta, onda ih možemo poredati ili prvi pa drugi ili drugi pa prvi: 2! = 2. Ako imamo tri objekta, recimo □, ○ i ▽, onda imamo 6 načina:

□○▽ □▽○ ○▽□ ○□▽ ▽□○ ▽○□,

dakle 3! = 6. No, primijetimo i da je $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Ako bismo imali četiri objekta, njih bismo u niz (ako ne vidiš zašto, jednostavno nabroji sve mogućnosti) mogli poredati u niz na $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ načina. A ako bismo nizali pet objekata, dobili bismo $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ načina, tj. 120 je broj načina na koji se pet objekata može poredati u niz (petero ljudi poredati u repu pred kinom, primjerice). Ta činjenica čini impresivnim jedan jednostavni matematički magični trik kojemu me je prije nekoliko godina naučio Steve Humble, engleski popularizator matematike poznat kao Dr. Maths. Za trik ti treba deset karata, po pet u svakoj od dvije boje. Pritom u svakoj boji imamo pet istih simbola, primjerice ovako:



Karte se slože tako da su prvo u nekom redoslijedu poredane karte s crnim simbolima, a onda na njih stavljene karte sa sivim simbolima složene istim redoslijedom. Karte držimo poleđinom prema gore, ali se na početku trika pokaže kako su složene. Sudionik trika smije jednom ili više puta presjeći taj snop karata (presjeći znači uzeti s vrha neki broj karata i sve njih zajedno, bez razdvajanja, prebaciti na dno snopa). Nakon toga izvođač trika odbroji, jednu po jednu, pet karata s vrha. Sad imamo dva snopa s po pet karata; jedan je izvođačev, a drugi sudionikov. Izvođač trika sad tvrdi: „Moći ću pogoditi točno, redom, tvoje karte. I boju i simbol." Naravno, kad bi sve bilo potpuno nasumično, vjerojatnost da izvođač pogodi bila bi 1/120, jer sudionikovih pet karata može biti raspoređeno na 5! = 120 načina (naravno, pogledom u svoj snop izvođač lako vidi koje karte sam ima, pa zna kojih pet karata ima sudionik, no na prvi pogled ne može znati koji im je redoslijed).

Uputa koju izvođač daje sudioniku je sljedeća: „Koliko sad imaš karata? Pet. Sada prebaci, jednu po jednu, četiri karte s vrha na dno svog špila!". Nakon toga izvođač pogađa najgornju kartu kod sudionika. Ispast će u pravu. Sad kaže: „Ostale su ti četiri karte. Sada, jednu po jednu, prebaci tri karte s vrha na dno.". Nakon toga izvođač opet uspješno pogađa najgornju kartu sudionika. Kad sudioniku ostanu tri karte, uputa je da prebaci dvije karte pojedinačno s vrha na dno, kad ostanu dvije, uputa je da ih samo zamijeni. Naravno, ako je izvođač pogodio prve četiri karte točno, zadnju također sigurno pogađa. No, kako će pogoditi? Sve što treba je gledati koja je karta kod njega na vrhu i reći isti simbol, ali druge boje, te nakon svakog pogađanja odložiti svoju kartu. Recimo, na početku, kad su oboje imali pet karata, ako je kod izvođača gornja karta sivo srce, onda će najgornja karta sudionika biti crno srce, a nakon toga izvođač odloži svoje sivo srce na stranu.

Dokaz da trik stvarno uvijek funkcionira nije sasvim lagan, ali što se zapravo događa lako možemo opisati na primjeru sa šest karata: 1, 2, 3, *1, 2, 3* (izvođenje trika sa šest karata nije tako impresivno jer je tu mogućnost da izvođač nasumce pogodi tri sudionikove karte relativno velika, 1/6; trik s deset karata je optimalan – više karata činilo bi ga predugim, a za manje nije toliko iznenađujući). Dakle, neka su na početku karte poslaganje u redoslijedu 1, 2, 3, *1, 2, 3* (karta *3* je najgornja). Sudionik recimo jednom presiječe prebacujući gornje četiri karte na dno. Sad je redoslijed 3, *1, 2, 3,* 1, 2. Izvođač odbroji tri karte jednu po jednu da dade sudioniku. Dakle, sudionik će dobiti (odozdo prema gore) karte 2, 1, *3*, a izvođaču ostaju 3, *1, 2.* Prije prvog pogađanja sudionik mora prebaciti tri karte jednu po jednu s vrha na dno: *3*, 2, 1 pa 1, *3*, 2. Kao što vidimo, obojica sad imaju isti simbol na vrhu pa izvođač može pogoditi najgornju kartu (dvojka u kurzivu). Nakon toga sudioniku je ostalo 3, *1* koje treba zamijeniti, čime ima *1*, 3, što je opet isti redoslijed simbola kao kod izvođača (1, *3*). I stvarno, ako se držiš uputa (presijecanje – odbrojavanje pola karata – sudionik uvijek prije pogađanja jednu po jednu prebacuje za 1 manje karata nego što ima s vrha na dno), uvijek će pri pogađanju izvođač i sudionik na vrhu imati isti simbol!