Matka 30 (2021./2022.) br. 120

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

NIZOVI ZADANI KVADRATIĆIMA, ARITMETIČKI NIZOVI ILI POLINOMI RAZLIČITOG STUPNJA

U Matki često prikazujemo različita rješenja koja Magičari smišljaju kako bi numeričke podatke vizualizirali (geometrijski prikazali).

Uvod

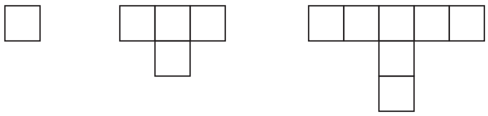
Ovakve probleme prikazivanja brojeva Matemagičari su odavno rješavali pomoću točaka kao vrhova mnogokuta i unutar mnogokuta.

Spajanje odnosno prikazivanje, geometrijsko i numeričko, omogućuje nam bolje razumijevanje zakonitosti koje se pojavljuju u određenom problemu i njihovo povezivanje s pojmom polinoma (određenog stupnja).

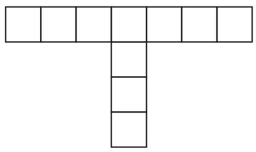
U ovom ćemo tekstu pri rješavanju problema i zadataka primijeniti ideju vizualizacije pomoću kvadratića i broja kvadratića u određenom liku.

Primjer za zagrijavanje

Primjer 1. Zadana su tri lika. Koji je sljedeći lik u nizu? Koji je tisućiti član toga niza? Kako se može zapisati n-ti član ovoga niza?



Rješenje. Na slici je prikazano moguće rješenje pomoću kvadratića.



Brojčano, to je niz prikazan na slici: 1, 4, 7, a sljedeći član je 10. Dakle, razlika između susjednih članova jednaka je 3, pa je sljedeći član 10 + 3 = 13. Riječ je o nizu koji se u matematici naziva *aritmetički niz* s početnim članom $a_1 = 1$ i razlikom $d = 3$, odnosno o polinomu prvog stupnja (pravilnosti koju možemo zapisati u obliku $f(n) = an + b$).

Naravno da nećemo grafički odnosno pomoću kvadratića prikazati tisućiti član niza. Njega ćemo zapisati numerički.

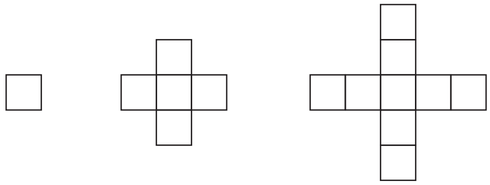
Kako glasi izraz pomoću kojega možemo izračunati n-ti član niza?

Opći (n-ti) član takvog niza možemo izračunati po formuli $a_n = a_1 + (n - 1)d$. U ovom slučaju, ako je $a_1 = 1$ i $d = 3$, taj izraz glasi $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3$, pa je tisućiti član jednak $a_{1000} = 1 + (1000 - 1) \cdot 3 = 2998$.

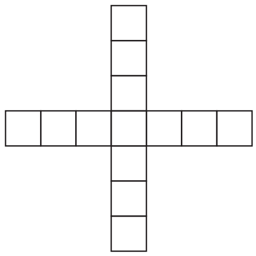
Do istog rješenja možemo doći uvrštavanjem poznatih vrijednosti $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ u izraz $f(n) = an + b$. Time bismo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama: $\begin{cases} 1 = a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases}$. Rješenje tog sustava je $a = 3$, $b = -2$, tj. radi se o pravilnosti $f(n) = 3n - 2$. U tom je slučaju n-ti član niza $a_n = 3n - 2$, tj. tisućiti član niza jednak je $f(1000) = 3 \cdot 1000 - 2 = 2998$.

Zadatci

Zadatak 1. Zadana su prva tri lika nekog niza. Koji je sljedeći lik u tome nizu? Koji je stoti član niza? Kako se može zapisati n-ti član ovoga niza?



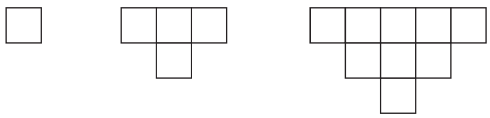
Rješenje: Sljedeći je član (s kvadratićima) prikazan je na rubu.



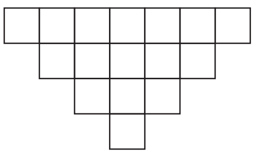
Dakle, imamo numerički niz s prva tri člana 1, 5 i 9. Budući da u svakom koraku dodajemo po 4 kvadratića, sljedeći član u nizu bio bi 13. I ovdje se radi o aritmetičkom nizu s početnim članom $a_1 = 1$ i razlikom $d = 4$, odnosno o polinomu prvog stupnja.

Zato je stoti član niza jednak $a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 4 = 397$.

Zadatak 2. Zadana su prva tri lika nekog niza. Koji je sljedeći lik u tome nizu? Kako se može zapisati n-ti član ovoga niza?



Rješenje: Numerički članovi niza su: 1, 4 i 9.
Sljedeći je član (s kvadratićima)



tj. sa 16 kvadratića, pa je niz 1, 4, 9, 16...

Vidimo da se niz brojeva povećava za 3, 5, 7 na ovoj drugoj razini razlika ili s kvadratom brojeva. Sljedeći bi se član trebao povećati za 9 kvadratića, tj. bio bi jednak 16 + 9 = 25.

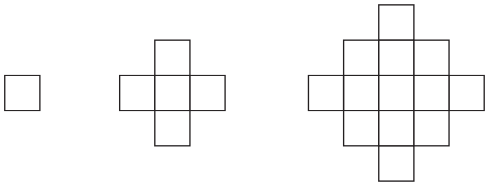
Dakle, riječ je o kvadratnom polinomu jer je u teoriji poznato da se radi o polinomu stupnja na kojoj se razlike stabiliziraju, tj. postanu konstantne. Ovdje je riječ o tome da se razlike stabiliziraju (postanu konstantne) na drugoj razini računanja razlika, tj. da se radi o kvadratnom polinomu oblika $f(n) = an^2 + bn + c$ koji je „u pozadini" zakonitosti.

Sukladno tome određuju se koeficijenti kvadratnog polinoma, a i njegove zakonitosti rješavajući tri jednadžbe s trima nepoznanicama.

Budući da znamo da je $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ i $f(3) = 9$, trebamo odrediti nepoznate koeficijente a, b i c u zakonitosti $f(n) = an^2 + bn + c$.

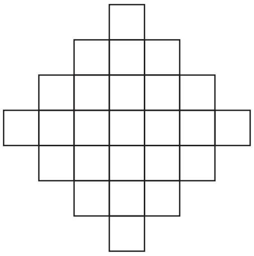
Rješavanjem sustava $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 4 = 4a + 2b + c \\ 9 = 9a + 3b + c \end{cases}$ dobivamo $a = 1$, $b = 0$ i $c = 0$, što znači da je zakonitost $f(n) = n^2$, tj. n-ti član niza određujemo prema pravilu $a_n = n^2$.

Zadatak 3. Zadana su prva tri lika nekog niza. Koji je sljedeći lik u tome nizu? Kako se može zapisati n-ti član ovoga niza?



Rješenje: Numerički članovi niza su: 1, 5 i 13.

Sljedeći je član s kvadratićima



tj. s 25 kvadratića, pa su članovi niza 1, 5, 13, 25...

Dodavali smo redom 4, 8, 12… kvadratića, pa se i ovdje radi o polinomu drugog stupnja $f(n) = an^2 + bn + c$. Određivanje koeficijenata a, b, c moguće je rješavanjem sustava triju jednadžbi s trima nepoznanicama: $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ 13 = 9a + 3b + c \end{cases}$.

Rješenje sustava je $a = 2$, $b = -2$ i $c = 1$, što znači da je zakonitost $f(n) = 2n^2 - 2n + 1$. Prema tome, n-ti član toga niza računa se kao $a_n = 2n^2 - 2n + 1$.

Ovaj zadatak i brojeve možemo razmotriti i na drukčiji način (ne rješavajući sustav triju jednadžbi s trima nepoznanicama).

Uočimo da članove niza možemo rastaviti na zbroj dvaju kvadrata, tj. da vrijedi:

$$a_1 = 1 = 1^2 + 0^2, \quad a_2 = 5 = 2^2 + 1^2, \quad a_3 = 13 = 3^2 + 2^2,$$

$$a_4 = 25 = 4^2 + 3^2, \quad a_5 = 41 = 5^2 + 4^2, \ldots$$

$$a_n = n^2 + (n-1)^2$$

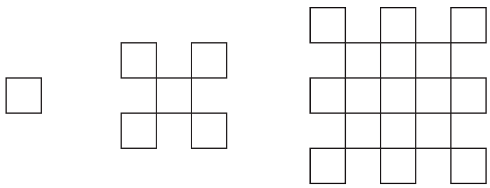
Budući da je $n^2 + (n-1)^2 = n^2 + n^2 - 2n + 1$, zaključujemo da je

$$a_n = n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1.$$

Zadatak za rješavanje

Evo zadatka za vježbu i provjeru metode.

Zadatak 4. Zadana su prva tri lika nekog niza. Koji je sljedeći lik u tome nizu? Kako se može zapisati n-ti član ovoga niza?



Uputa. Kad se nacrtaju članovi niza, dobivaju se brojevi 1, 5, 17, 37... i uočava se da su razlike 4, 12, 20, tj. razlika je 8. Sljedeći član je 37 + (20 + 8) = 65.

Zadatak 5. Smislite neki sličan zadatak i riješite ga grafički i numerički.

Napomena. Autora koji nam pošalje jedan svoj zadatak i rješenje nagradit ćemo jednom knjigom iz *Matematičke biblioteke*.