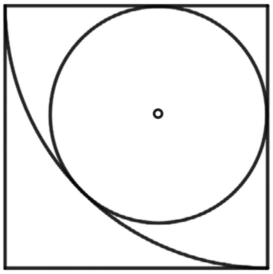
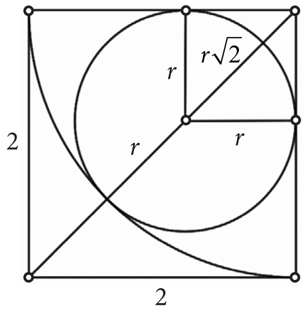
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. U kvadrat stranice duljine 2 cm upisan je krug najveće moguće površine, kako je prikazano na slici. Kolika je površina toga kruga?



Rješenje: Polumjer kružnice kojoj pripada istaknuti kružni luk jednak je duljini stranice velikoga kvadrata, tj. 2. Isti taj polumjer jednak je $r + r\sqrt{2}$.



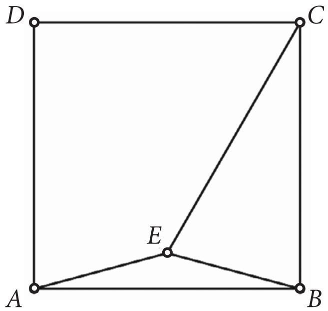
Iz toga slijedi:

$$r\sqrt{2} + r = r\left(\sqrt{2}+1\right) = 2 \text{, tj.}$$

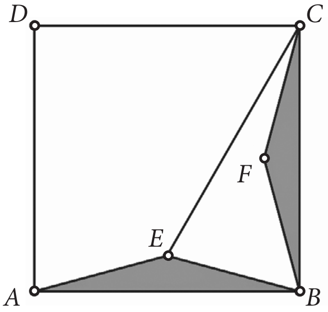
$$r = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0.828 \,.$$

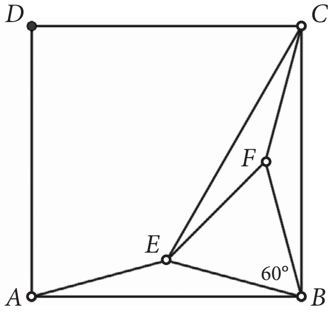
Površina kruga je $p = r^2\pi = 2.6$.

Primjer 2. U kvadratu $ABCD$ za točku E vrijedi $|\angle BAE| = |\angle EBA| = 15°$. Kolika je mjera kuta $\angle ECB$?

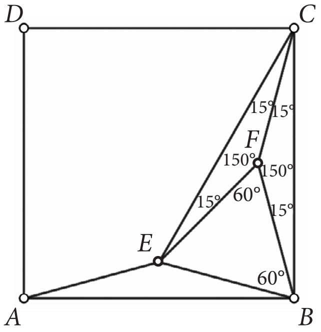


Rješenje: Odredimo točku F takvu da je $|\angle CBF| = |\angle FCB| = 15°$. To znači da su trokuti ABE i BCF sukladni jednakokračni trokuti s osnovicama $\overline{AB}$, odnosno $\overline{BC}$. Tada vrijedi $|BE| = |BF|$ i $|\angle FBE| = 90° - 2 \cdot 15° = 60°$. Slijedi da je trokut EBF jednakostraničan.



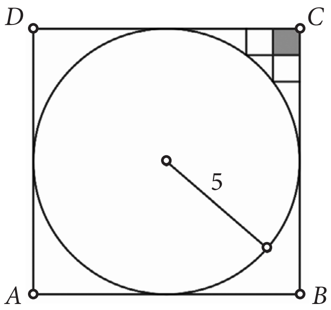


Dakle, vrijedi $|BF| = |FC| = |EF|$, što znači da je i trokut CEF jednakokračan, a za njegove kutove vrijedi $|\angle CFE| = 360° - |\angle EFB| - |\angle BFC| = 150°$ i $|\angle FEC| = |\angle ECF| = 15°$.

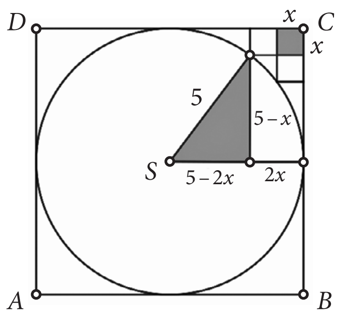


Mjera kuta $\angle ECB$ je stoga 30°.

Primjer 3. U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica radijusa 5. Između kvadrata i kružnice upisana su tri sukladna kvadrata najveće moguće površine, kako je prikazano na slici. Kolika je površina svakog od tih kvadrata?



Rješenje: Označimo s x duljinu stranice kvadrata. Slika se može dopuniti pravokutnim trokutom kojemu su krajnje točke hipotenuze središte kružnice i jedan vrh maloga kvadrata koji pripada kružnici, a katete su paralelne sa stranicama kvadrata.



Primijenimo li na istaknuti pravokutni trokut Pitagorin poučak, dobiva se:

$$(5-2x)^2+(5-x)^2=5^2$$

Sređivanjem jednadžbe dobiva se:

$$\begin{gathered}25-20x+4x^2+25-10x+x^2=25\\ 5x^2-30x+25=0\ |:5\\ x^2-6x+5=0\end{gathered}$$

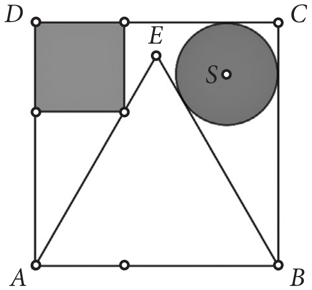
Izraz na lijevoj strani može se napisati u obliku umnoška:

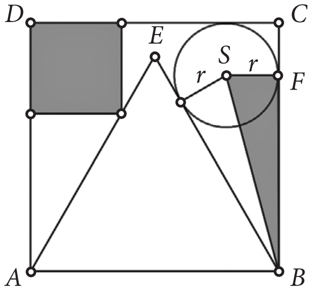
$$\begin{gathered}x^2-5x-x+5=0\\ x\,(x-5)-(x-5)=0\\ (x-5)\,(x-1)=0\end{gathered}$$

Jednakost vrijedi samo ako je $x = 5$ ili $x = 1$.

Ako bi bilo $x = 5$, onda bi radijus kružnice bio 0, što je nemoguće. Zato je jedino rješenje $x = 1$, a to znači da je površina jednoga maloga kvadrata $p = x^2 = 1$.

Primjer 4. Nad stranicom $\overline{AB}$ unutar kvadrata *ABCD* konstruiran je jednakostranični trokut *ABE*. Između kvadrata i trokuta upisani su manji kvadrat kojemu je jedan vrh na stranici trokuta i krug koji dira dvije stranice kvadrata i jednu stranicu trokuta. Ima li veću površinu upisani kvadrat ili krug?

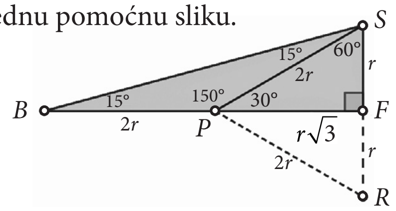




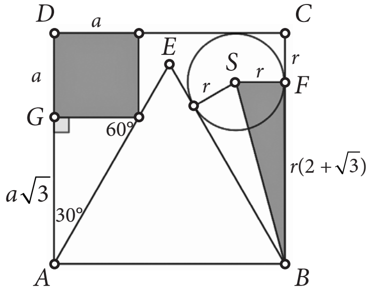
Rješenje: Neka je r polumjer upisane kružnice. Istaknimo pravokutni trokut *SBF*. (Slika na lijevom rubu)

Uočimo da je $|\angle CBE| = 90° - |\angle EBA| = 90° - 60° = 30°$. Središte kružnice *S* je na simetrali toga kuta jer kružnica dira oba kraka pa je $|\angle FBS| = 15°$, tj. polovina kuta $|\angle CBE|$. Drugi šiljasti kut trokuta *SBF* onda ima mjeru $|\angle BSF| = 75°$.

Pogledajmo najprije jednu pomoćnu sliku.



Trokut *PRS* jednakostraničan je, sa stranicom duljine $2r$. Njegovi kutovi imaju mjere 60°, a visina mu je $|PF| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Produljimo li tu visinu preko vrha *P* do točke *B*, za $2r$ dobivamo jednakokračni trokut *SBP* kojemu kut između krakova ima $|\angle SPB|$ = 150°, a ostala dva kuta imaju mjeru 15°. Sada možemo istaknuti pravokutni trokut *BFS* kojemu šiljasti kutovi imaju 15° i 75°. Dulja kateta toga trokuta ima duljinu $|BF| = 2r + r\sqrt{3} = r\left(2+\sqrt{3}\right)$.



Koristeći ovaj rezultat na pomoćnoj slici možemo zaključiti da je duljina stranice kvadrata *ABCD* jednaka $|BC| = |BF| + |FC| = r\left(2+\sqrt{3}\right) + r = r\left(3+\sqrt{3}\right)$.

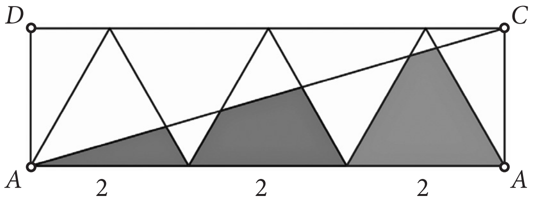
S druge strane, vrijedi $|AD| = |AG| + |GD| = a\sqrt{3} + a = a\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Iz $|AD| = |BC|$ slijedi $a\left(\sqrt{3}+1\right) = r\left(3+\sqrt{3}\right)$, tj.

$$a = r\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = r\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = r\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1} = r\sqrt{3}.$$

Dakle, površina kvadrata je $a^2 = \left(r\sqrt{3}\right)^2 = 3r^2$, a površina kruga $r^2\pi$. Budući da je $3 < \pi$, onda je i površina kvadrata manja od površine kruga.

Zadatak 1. Unutar pravokutnika *ABCD* upisana su tri sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine 2. Trokuti su presječeni dijagonalom $\overline{AC}$. Pokaži da je zbroj osjenčanih površina na prva dva trokuta veći od površine osjenčane na trećem trokutu.



Izvori:

1. https://www.youtube.com/channel/UCHnj59g7jezwTy5GeL8EA_g
2. https://www.youtube.com/channel/UCJok4N-aJSFTl63LJ16o9VQ