



Nikol Radović, Seget Donji/Sisak

MM – KONSTRUKCIJE I SKETCHPAD

Danski matematičar Georg Mohr /Jørgen Mohr/(1640. – 1697.) godine je 1672. izdao knjigu naslova Euclides Danicus, Slika 1.



Slika 1.

Izvornik_ <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mohr> (26.04.2022.)

U njoj je dokazao da se sve euklidske konstrukcije mogu nacrtati/konstruirati samo šestarom. Sto godina kasnije, talijanski matematičar i fizičar Mascheroni dokazao je isti teorem kao i Mohr (naime, Mohrova se knjiga s rezultatima u međuvremenu bila zagubila, a pronađena je u jednom antikvarijatu u Kopenhagenu i ponovno izdana tek 1928. godine). Mascheroni je, stoga, neovisno o Mohrovim idejama izdao knjigu Geometra del compasso 1797. godine, Slika 2.



Slika 2.

Izvornik_ <https://www.maa.org/book/export/html/1523182> (26. 4. 2022.)

Teorem. Sve konstrukcije koje se mogu provesti ravnalom i šestarom, mogu se provesti i samo šestarom.

Dokaz samog teorema može se naći u različitim knjigama. Tema našega razmatranja bit će MM-konstrukcije pomoću *Sketchpada*. *Sketchpad* će biti „šestar”. Na početku krećemo od nekih pretpostavki (temeljnih konstrukcija) kako bismo mogli izvoditi MM-konstrukcije:

(MM_1): konstrukcija spojnice dviju točaka ili dvije različite točke određuju/definiraju pravac;

(MM_2): konstrukcija kružnice zadanog središta i polumjera ili moguće je nacrtati/konstruirati kružnicu ako su zadani središte i polumjer;



(MM_3): konstrukcija presjeka dviju kružnica ili moguće je nacrtati/konstruirati točku/točke koje su presjek dviju kružnica;

(MM_4): konstrukcija presjeka pravca i kružnice ili moguće je nacrtati/konstruirati točku/točke presjeka pravca i kružnice;

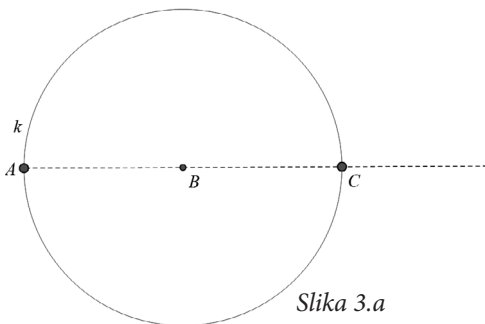
(MM_5): konstrukcija presjeka dvaju pravaca ili određena je točka (presjek) dvaju pravaca.

Primjenjivat ćemo *Sketchpad* kao Alat za crtanje, no pretpostavit ćemo da se nešto dogodilo i da *Sketchpad* ne može crtati/konstruirati ravne objekte tj. dužine, polpravce i pravce (u rješenjima problema bit će nacrtane tanko i točkasto kako bi nas prisjetile na konstrukcije kada smo smjeli crtati i dužine/pravce).

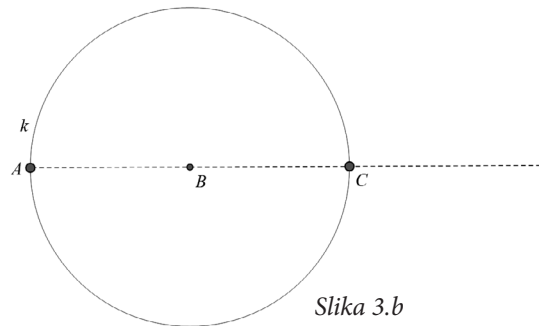
Konstrukcija 1. Konstruirajmo točku C polupravca AB tako da vrijedi $|AC| = 2 \cdot |AB|$.

Problem vrlo jednostavno rješavamo kada crtamo/konstruiramo šestom i ravnalom. Na Slici 3.a) prikazana je konstrukcija.

- Nacrtamo kružnicu $k(B, |AB|)$ – označimo točke B i A (pazimo na redoslijed) i u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Kružnica: središte + točka**.
- Kružnica $k(B, |AB|)$ i polupravac AB sijeku se u dvije točke; jedna je točka A , a druga je točka C koju je i trebalo konstruirati – označimo kružnicu k i polupravac pa u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Presjek**.
- Za kontrolu, mjerimo. Izmjerimo udaljenosti točaka (označimo točke A i B , odnosno točke A i C pa u izborniku **Mjerenje** odaberemo naredbu **Udaljenost**). Sada otvorimo izbornik **Broj** i naredbu **Računalo** i redom označavamo mjere; podijelivši ih, trebamo dobit rezultat 2 ili 0.5, ovisno kako smo birali mjere, Slika 3.b.



Slika 3.a



Slika 3.b

$$\begin{array}{l} |AB| = 5.61 \text{ cm} \\ |AC| = 11.22 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{|AC|}{|AB|} = 2.00 \\ \frac{|AB|}{|AC|} = 0.50 \end{array}$$



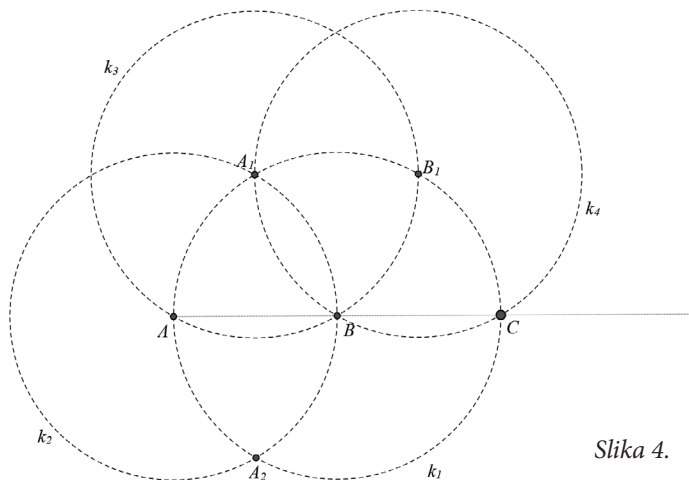


Uvijek pri crtanju šestarom crtamo/konstruiramo dijelove kružnica, lukove. Kada bismo crtali/konstruirali rješenja zadataka na crnoj/zelenoj/bijeloj ploči ili na papiru, i mi bismo tako postupili. No, mi imamo alat za crtanje *Sketchpad* (ili možda neki drugi). Crtanje/konstruiranje lukova *Sketchpadom* zahtijeva prvo crtanje/konstruiranje kružnice zadanog polumjera pa tek onda konstrukcije luka koji je dio kružnice. Dogovorno ćemo crtati/konstruirati kružnice. Kada nam za rješavanje nekog problema budu nužni lukovi, onda ćemo ih i konstruirati. Riješimo postavljen zadatak pomoću kružnica, šestarom, tj. *Sketchpadom*.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_1(B, |BA|)$ – označimo točke B i A (pazimo na redoslijed) i u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Kružnica: središte + točka**.

Ovaj početni korak identičan je crtanju ravnalom i šestarom. Idući korak početak je razlike jer je polupravac AB „imaginaran“ i nema crtanja dužina/pravaca.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_2(A, |AB|)$ – označimo točke A i B (pazimo na redoslijed) i u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Kružnica: središte + točka**.
- Kružnice $k_1(B, |BA|)$ i $k_2(A, |AB|)$ sijeku se u točkama A_1 i A_2 – označimo kružnice i u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Presjek**.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_3(A_1, |A_1B|)$ – ponavljamo prije opisane korake konstrukcije.
- Kružnice $k_1(B, |BA|)$ i $k_3(A_1, |A_1B|)$ sijeku se u točkama A i B_1 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_4(B_1, |B_1B|)$.



Slika 4.

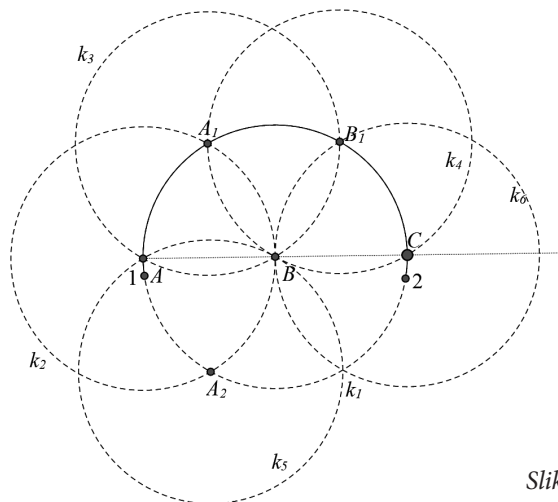


- Kružnice $k_1(B, |BA|)$ i $k_4(B_1, |B_1B|)$ sijeku se u točkama B i C , Slika 4.
- Točku C trebalo je konstruirati. Provjeriti možemo mjerenjem, kao i u slučaju klasične konstrukcije šestarom i ravnalom.

Konstrukciju smo proveli samo šestarom.

Uočimo dužine (iako ih nismo konstruirali/crtali) $\overline{AB}, \overline{AA_1}, \overline{BA_1}, \overline{A_1B_1}, \overline{BB_1}, \overline{B_1C}, \overline{BC}$. One su međusobno sukkladne, ali i više od toga, one su stranice jednakostraničnih trokuta $\triangle ABA_1, \triangle A_1BB_1$ i $\triangle BB_1C$. Nadalje, svaki od kutova $\angle A_1BA_1, \angle A_1BB_1, \angle B_1BC$ veličine je 60° . Dakle, ABC je pravac, točke A i B i C su kolinearne.

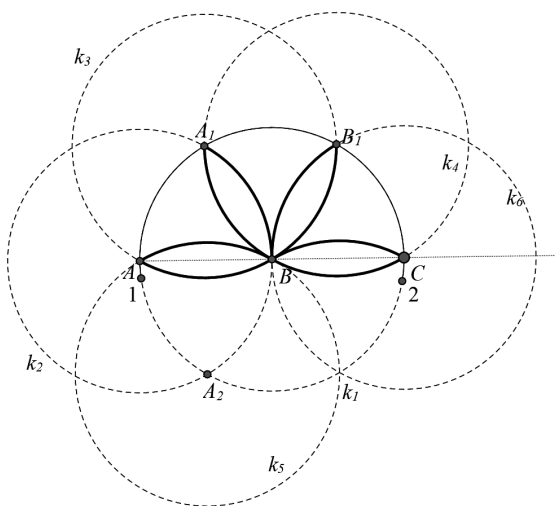
Ova konstrukcija može se iskoristiti za konstrukciju zgodne sličice ili, kako je sada uvriježeno reći, dizajna. Krenimo od slike 4. Docrtajmo prvo kružnice $k_5(A_2, |A_2B|)$ i $k_6(C, |CB|)$ na isti način kao i preostale kružnice. U ovom slučaju morat ćemo konstruirati lukove. Da bismo mogli konstruirati luk/lukove, na kružnici moraju biti konstruirane točke ili ih moramo dodati. Prvo na kružnicu $k_1(B, |BA|)$ nacrtajmo dvije različite točke, primjerice točke 1 i 2 – označimo kružnicu $k_1(B, |BA|)$ i u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Točka** na kružnici. Ponovimo konstrukciju jer uvijek možemo konstruirati samo jednu točku. Odaberimo točke 2 i 1 (poredak je važan) i kružnicu $k_1(B, |BA|)$ pa u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Kružni luk**, slika 5. Ako nam program ne nacрта/konstruira željeni luk, vjerojatno smo pogriješili orijentaciju. Vratimo se korak unazad (u izborniku **Uređivanje** odaberemo naredbu **Poništite konstrukciju kružnog luka**), promijenimo poredak označenih točaka i ponovimo konstrukciju luka.



Slika 5.

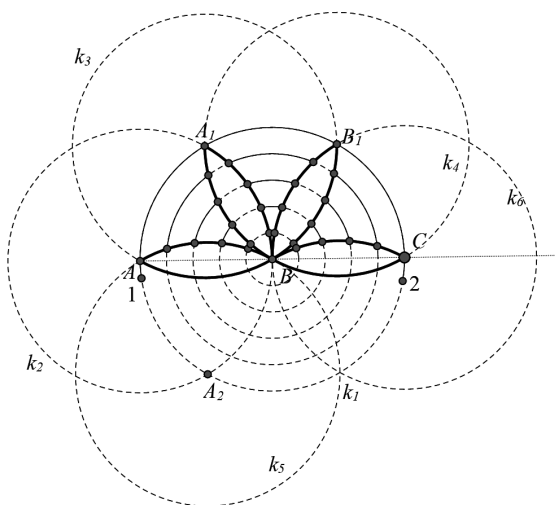


Nastavljamo s konstrukcijom lukova na kružnicama, ali pomoću već postojećih točaka. Primjerice, označimo točke A i B i kružnicu $k_3(A_1, |A_1B|)$ pa u izborniku **Konstrukcije** odaberemo naredbu **Kružni luk** i nastavljamo za preostale točke i kružnice. Jedno od mogućih rješenja je na Slici 6.



Slika 6.

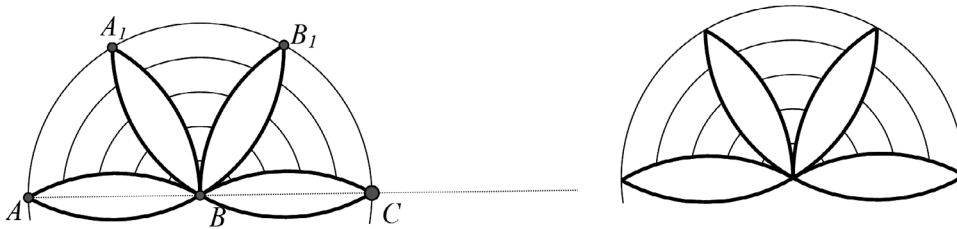
Sada bismo mogli konstruirati koncentrične kružnice sa središtem u točki B , različitih polumjera. Te kružnice sjeći će već nacrtane lukove pa između možemo crtati/konstruirati lukove, Slika 7.



Slika 7.

Izbrisavši sve pomoćno (naravno da ne brišemo nego „posakrivamo”), označimo neki objekt koji nam više ne treba te u izborniku **Zaslon** odaberemo naredbu **Sakrij objekte**, Slika 8.





Slika 8.

Dodavanjem malo boje, početna MM-konstrukcija šestarom rezultat će Slikom 9.



Slika 9.

Literatura:

1. Cheney, F. 1953. Can we Out Mascheroni? *The Mathematics Teacher*, Vol. 47, No. 3, 152 – 156.
2. Garden, M. 1992. *Mathematical Circus*. The Mathematical Association of America. Washington DC.
3. Hlavaty, J. H. 1957. Macheroni constructions. *The Mathematic Teacher*, Vol. 50, No- 7., 482 – 487.
4. Palman, D. 1996. *Geometrijske konstrukcije*. Element. Zagreb.
5. Palman, D. 1996. *Trokut i kružnica*. Element. Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. 2005. *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*. Key College Publishing. Emeryville.

Internetske adrese:

1. <https://www.maa.org/book/export/html/1523182> (26. 4. 2022.)
2. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mohr> (26. 4. 2022.)

