Jedna važna algebarska nejednakost i njezina primjena

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

U ovom ćemo članku dokazati jednu važnu algebarsku nejednakost te njenu primjenu, i to u nekoliko primjera. Poći ćemo od sljedeće algebarske nejednakosti:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2;\ (x, y, z > 0), \tag{1}$$

koja je nakon sređivanja ekvivalentna sa sljedećom nejednakošću:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2,$$

što je dalje ekvivalentno

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0,$$

odnosno

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$$

a ovo je očigledno točna nejednakost. Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $x = y = z$.

Uočimo također da je nejednakost (1) očigledna posljedica nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine za tri pozitivna broja, tj.

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

odnosno nakon kvadriranja ove nejednakosti:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

za $x, y, z > 0$, a ovo je nejednakost (1).

Sada se nameće jedno očigledno pitanje: vrijedi li i nejednakost

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \tag{2}$$

za $x, y, z > 0$?

[1]Šefket Arslanagić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BIH
[2]Daniela Zubović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BIH

Otići ćemo korak dalje, tj. dokazat ćemo da vrijedi sljedeća važna nejednakost:

$$\frac{x^n+y^n+z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \tag{3}$$

za $x, y, z > 0, n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za n pozitivnih brojeva, imamo:

$$x^n+(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \geq n\sqrt[n]{x^n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n(n-1)}} = n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1} x,$$

$$y^n+(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \geq n\sqrt[n]{y^n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n(n-1)}} = n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1} y,$$

$$z^n+(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \geq n\sqrt[n]{z^n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n(n-1)}} = n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1} z.$$

Nakon zbrajanja gornjih nejednakosti dobivamo sljedeću nejednakost:

$$x^n+y^n+z^n+3(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \geq n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1}(x+y+z),$$

koja je ekvivalentna

$$x^n+y^n+z^n \geq n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1}(x+y+z)-3(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n,$$

što je dalje ekvivalentno

$$x^n+y^n+z^n \geq 3n\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n-3(n-1)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n.$$

Sređivanjem dobivamo

$$x^n+y^n+z^n \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n,$$

odnosno

$$\frac{x^n+y^n+z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$$

čime je tvrdnja dokazana.

Vrijedi jednakost (3) u slučaju kada je $n=1$ ili $x=y=z$.

Sada vidimo da nejednakost (1) slijedi iz nejednakosti (3) za $n=2$, a nejednakost (2) slijedi iz nejednakosti (3) za $n=3$.

Napomena 1. Točnost nejednakosti (3) mogla bi se dokazati i pomoću matematičke indukcije. Ona očigledno vrijedi za n = 1 kada vrijedi jednakost (kao i za

n = 2, tj. vrijedi nejednakost (1)). Za korak indukcije trebalo bi dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n+1} \tag{4}$$

za $x, y, z > 0,\ n \in \mathbb{N}$ ako vrijedi nejednakost (3).

Množenjem nejednakosti (3) sa $\frac{x+y+z}{3} > 0$ dobivamo

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n+1} \leq \frac{x^n+y^n+z^n}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3} \ ,$$

odnosno

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n+1} \leq \frac{(x+y+z)(x^n+y^n+z^n)}{9} . \tag{5}$$

Sada bi trebalo dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{(x+y+z)(x^n+y^n+z^n)}{9} \leq \frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{3} . \tag{6}$$

Tada bismo iz nejednakosti (5) i (6) dobili nejednakost (4).

Sada ćemo dokazati nejednakost (6).

Dokaz: S obzirom da su brojevi $x-y$ i x^n-y^n istoga predznaka, možemo pisati

$$(x-y)\,(x^n-y^n) \geq 0$$

za $n \geq 1$. Na isti način imamo

$$(y-z)\,(y^n-z^n) \geq 0$$
$$(z-x)\,(z^n-x^n) \geq 0$$

za $n \geq 1$.

Ako zbrojimo tri posljednje nejednakosti, dobivamo nejednakost

$$(x-y)(x^n-y^n)+(y-z)(y^n-z^n)+(z-x)(z^n-x^n) \geq 0 ,$$

koja je ekvivalentna s nejednakošću

$$2\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right) \geq x\left(y^n+z^n\right)+y\left(z^n+x^n\right)+z\left(x^n+y^n\right).$$

Ako lijevoj i desnoj strani ove nejednakosti dodamo po $x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}$, dobivamo sljedeću nejednakost:

$$3\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right) \geq (x+y+z)\left(x^n+y^n+z^n\right),$$

odnosno

$$\frac{(x+y+z)(x^n+y^n+z^n)}{9} \leq \frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{3} \ ,$$

a ovo je nejednakost (6) koju je trebalo dokazati. Dakle, ovime je dokazana i nejednakost (4).

Dat ćemo sada nekoliko primjera nejednakosti koje se dokazuju pomoću nejednakosti (3).

Primjer 1. Neka su $a,b,c>0$ realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ . \tag{7}$$

Rješenje: Uzet ćemo zamjenu $\frac{a}{b}=x,\ \frac{b}{c}=y,\ \frac{c}{a}=z$. Odavde slijedi jednakost $xyz=1$. Sada je dana nejednakost (7) ekvivalentna s nejednakošću

$$x^2+y^2+z^2\geq x+y+z\,. \tag{8}$$

Iz nejednakosti (1) slijedi nejednakost

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}\,. \tag{9}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\,. \tag{10}$$

Sada iz nejednakosti (9) i (10), uz činjenicu da je $xyz=1$, slijedi da je

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{x+y+z}{3}(x+y+z)\geq\sqrt[3]{xyz}\,(x+y+z)=x+y+z\,,$$

odnosno

$$x^2+y^2+z^2\geq x+y+z\,,$$

a ovo je nejednakost (8). Ovime je dokazana i nejednakost (7).

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $x=y=z=1$, odnosno vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $a=b=c$.

Primjer 2. Neka su a,b,c realni pozitivni brojevi takvi da vrijedi jednakost $a+b+c=1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4}. \tag{11}$$

Rješenje: Zbog dane jednakosti $a+b+c=1$ imamo:

$$\begin{aligned}\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}&=\frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2}+\frac{b(a+b+c)}{(c+a)^2}+\frac{c(a+b+c)}{(a+b)^2}\\&=\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.\end{aligned} \tag{12}$$

Iz nejednakosti (1) za $x=\frac{a}{b+c},\ y=\frac{b}{c+a},\ z=\frac{c}{a+b}$ slijedi da je

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{3}. \tag{13}$$

Imamo dobro nam poznatu Nesbittovu nejednakost:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \tag{14}$$

čijih se više raznih dokaza može naći u [1] i [2].

Sada iz nejednakosti (12), (13) i (14) slijedi:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$\geq\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4},$$

odnosno

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4},$$

čime je nejednakost (11) dokazana.

Vrijedi jednakost u (11) ako i samo ako je $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Primjer 3. Neka su $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ i $abc=1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4}. \tag{15}$$

Rješenje: Na osnovi nejednakosti (1) imamo da je

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\right)^2. \tag{16}$$

Neka je $a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{x}$. Sada imamo da je

$$\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}=\frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{z}}+\frac{\frac{y}{z}}{1+\frac{y}{x}}+\frac{\frac{z}{x}}{1+\frac{z}{y}}$$

$$=\frac{xz}{yz+xy}+\frac{xy}{xz+yz}+\frac{yz}{xy+xz}\geq\frac{3}{2}$$

jer, stavljajući da je $xy=u, yz=v, xz=w$, dobivamo Nesbittovu nejednakost

$$\frac{u}{v+w}+\frac{v}{u+w}+\frac{w}{u+v}\geq\frac{3}{2}.$$

Dakle, imamo nejednakost

$$\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\geq\frac{3}{2},$$

odnosno

$$\left(\frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{9}{4}. \tag{17}$$

Sada iz (16) i (17) slijedi nejednakost

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4},$$

odnosno

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4},$$

čime je nejednakost (15) dokazana.

Vrijedi jednakost u nejednakosti (15) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Primjer 4. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in [0,90°]$ takvi kutovi da vrijedi jednakost $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{tg}^2\,\beta+\mathrm{tg}^2\,\gamma\geq\frac{3}{8}. \tag{18}$$

Rješenje: Imamo

$$\mathrm{tg}^2\,x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1,$$

pa dana nejednakost sada glasi

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq\frac{3}{8}+3,$$

odnosno

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq\frac{27}{8}. \tag{19}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja slijedi nejednakost

$$\frac{3}{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\leq\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}$$

$$=\frac{1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+1-\sin^2\gamma}{3}=1-\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3}. \tag{20}$$

Iz nejednakosti (1) imamo nejednakost

$$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3}\geq\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2,$$

a odavde, zbog danoga uvjeta $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1$, slijedi nejednakost

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geq\frac{1}{3},$$

odnosno

$$-\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)\leq-\frac{1}{3}. \tag{21}$$

Sada iz (20) i (21) dobivamo nejednakost

$$\frac{3}{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\leq1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

a odavde slijedi nejednakost

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right)\geq\frac{9}{8},$$

odnosno

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq\frac{27}{8},$$

a ovo je nejednakost (19). Ovime je dana nejednakost (18) dokazana.

Vrijedi jednakost u (18) ako i samo ako je $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, tj. zbog $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1$, ako i samo ako je $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{1}{3}$, te $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, odnosno $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Primjer 5. Vrijedi nejednakost

$$a^n+b^n+c^n\geq\left(\frac{a+2b}{3}\right)^n+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^n+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^n \tag{22}$$

za sve $a,b,c>0$ i $n\in\mathbb{N}$.

Rješenje: Na osnovi nejednakosti (3) imamo

$$\frac{a^n+b^n+b^n}{3}\geq\left(\frac{a+b+b}{3}\right)^n=\left(\frac{a+2b}{3}\right)^n,$$

$$\frac{b^n + c^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{b+c+c}{3}\right)^n = \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n,$$

$$\frac{c^n + a^n + a^n}{3} \geq \left(\frac{c+a+a}{3}\right)^n = \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n,$$

a odavde, nakon zbrajanja ovih nejednakosti,

$$a^n + b^n + c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n,$$

što je trebalo i dokazati.

Vrijedi jednakost u (22) ako i samo ako je $a = b = c$.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Chirciu, M., *Inegalitati Algebrice – De la initiere la performanta*, Paralela 45, Pitesti, Romania, 2014.
3. Pečarić, J., *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Mala matematička biblioteka - 6, Element, Zagreb, 1996.