Računanje broja π pomoću čačkalice

Ivica Vuković[1], Reni Banov[2], Tonko Pale[3]

Brojem π u povijesti su se bavili i profesionalni matematičari i radoznali amateri [1, 2, 3], pri čemu su postupci za računanje bili različitog stupnja složenosti [4], ponekad uz korištenje prikladnih pomagala, od ravnala i šestara do superračunala. U ovom ćemo tekstu pokazati da se broj π može računati i pomoću čačkalice i milimetarskog papira, ali uz pomoć trećeg pomagala – strpljivosti.

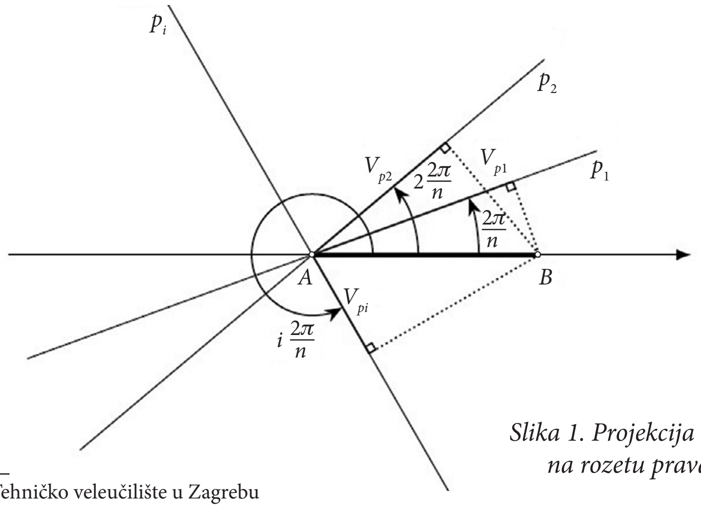
U ravnini zadamo dužinu $\overline{AB}$ duljine 1. Duljina projekcije dužina na pravce koji leže u toj ravnini bit će uvijek između 0 i 1. Drugim riječima, osvijetlimo li tu dužinu paralelnim zrakama, duljine sjene na različitim pravcima mijenjat će se od 0 do 1.

Duljinu projekcije $\overline{AB}$ na pravac p označit ćemo $V_p(AB)$ ili V_p. Ekvivalentno možemo prikazati duljinu projekcije na rozeti pravaca $(p_1, p_2, ..., p_n)$ konstruiranoj u rubnoj točki dužine $\overline{AB}$.

Pretpostavimo da kut od 360° podijelimo na n jednakih dijelova $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ i da računamo aritmetičku sredinu

$$V_n = \frac{V_{p_1} + V_{p_2} + ... + V_{p_n}}{n},$$

gdje su $V_{p_1}, V_{p_2}, ..., V_{p_n}$ duljine projekcije dužine $\overline{AB}$ u smjerovima $p_1, p_2, ..., p_n$ redom.



Slika 1. Projekcija dužine na rozetu pravaca

[1]Ivica Vuković, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[2]Reni Banov, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[3]Tonko Pale, student Tehničkog veleučilišta u Zagrebu

Očito postoji $V=\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ za koji ćemo pokazati da je $V=\frac{2}{\pi}\approx 0,637$.

Uz oznaku $\alpha_n=\frac{2\pi}{n}$, aritmetičku sredinu projekcija u smjeru pravaca iz rozete možemo zapisati na sljedeći način:

$$V_n=\frac{\left|\cos\alpha_n\right|+\left|\cos 2\alpha_n\right|+\left|\cos 3\alpha_n\right|+\ldots+\left|\cos n\alpha_n\right|}{n}.$$

Zbog simetrije vrijedi

$$\left|\cos\alpha_n\right|+\left|\cos 2\alpha_n\right|+\ldots+\left|\cos n\alpha_n\right|=4\left(\cos\alpha_n+\cos 2\alpha_n+\ldots+\cos\frac{n}{4}\alpha_n\right).$$

Pri sumaciji izraza pomoći će Moivreova formula za potenciranje kompleksnoga broja zapisanog u trigonometrijskom obliku

$$\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha .$$

Stoga imamo da je

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_n+\cos 2\alpha_n+\ldots+\cos\frac{n}{4}\alpha_n\\
&=\operatorname{Re}\left[\left(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n\right)+\left(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n\right)^2+\ldots+\left(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n\right)^{\frac{n}{4}}\right]\\
&=\operatorname{Re}\frac{\left(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n\right)^{\frac{n}{4}+1}-1}{\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n-1}=\operatorname{Re}\frac{\cos\left(\frac{n}{4}\alpha_n+\alpha_n\right)+i\sin\left(\frac{n}{4}\alpha_n+\alpha_n\right)-1}{\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n-1}\\
&=\operatorname{Re}\frac{-\sin\alpha_n+i\cos\alpha_n-1}{\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n-1}=\operatorname{Re}\frac{-\sin\alpha_n+i\cos\alpha_n-1}{\cos\alpha_n-1+i\sin\alpha_n}\cdot\frac{\cos\alpha_n-1-i\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n-1-i\sin\alpha_n}\\
&=\frac{\sin\alpha_n-\cos\alpha_n+1}{2\left(1-\cos\alpha_n\right)}.
\end{aligned}$$

Iz $2\left(1-\cos\alpha_n\right)=4\sin^2\frac{\alpha_n}{2}$ dobivamo da je

$$\frac{\sin\alpha_n}{4\sin^2\frac{\alpha_n}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{2}$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}4\left[\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{2}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\pi\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{2}{n}\right].$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$. Dakle, granična vrijednost aritmetičke sredine projekcija jedinične dužine jednaka je $\frac{2}{\pi}$. Neposredno iz ovoga računa lako je vidjeti da bi dobivena granična vrijednost za dužinu duljine l bila $\frac{2l}{\pi}$.

Dobiveni rezultat jednostavna je funkcija koja ovisi o broju π i može se primijeniti za računanje broja π.

Skupina od 27 studenata Tehničkog veleučilišta u Zagrebu provela je sljedeći pokus. Svaki je student čačkalicu duljine približno 65 mm na slučajan način 20 puta bacio na milimetarski papir i očitao duljinu projekcije čačkalice na horizontalnoj osi. Na taj je način očitano sveukupno 540 duljina projekcija. Aritmetička sredina svih dobivenih duljina projekcije bila je 40,81 mm. Dakle, iz $\frac{2\cdot 65}{\pi} \approx 40,81$ dobiva se $\pi \approx 3,185$.

Naravno da je riječ o pokusu s nizom metodologijskih mana. Niti su sve čačkalice jednako duge, niti je njihova duljina baš 65 mm, a ni broj bacanja čačkalice nije osobito velik. Očitavanje duljine projekcije također je neprecizno – korištena je tek mreža milimetarskog papira. Ipak, metodičke prednosti nisu zanemarive. Postignut je rezultat s točnosti na jedno decimalno mjesto, svakako bolji od biblijske vrijednosti broja π (*Stari zavjet*, *Prva knjiga o Kraljevima* 7,23 odakle se razabire $\pi = 3$) [3]. Studenti neposredno dožive koncept slučajnosti u matematici, a cijeli je pokus dobra priprava za pojam geometrijske vjerojatnosti koji se obično u visokoškolskoj matematici ilustrira problemom *Buffonove igle*. Osim toga, neposredno se uoče i neka aritmetička svojstva: važno je pri objedinjavanju rezultata da svi sudionici provedu isti broj pokusa jer *aritmetička sredina aritmetičkih sredina nije uvijek aritmetička sredina*.

Uvijek je u ovakvim izvodima osjetljivo pitanje prijelaza na graničnu vrijednost. Ovdje se koristi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, no ta se jednakost uvijek može zorno geometrijski predočiti i bez formalnog uvođenja pojma granične vrijednosti.

Literatura:

1. D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Books, London, 1987.
2. A. Klobučar, *Priča o broju π*, Matematičko fizički list za učenike srednjih škola, 189 (1997.), 1; 1-4
3. I. Vuković, *Kronološka tablica priče o broju π*, Matematičko fizički list za učenike srednjih škola, 189 (1997.), 1; 5-7
4. D. Sabolić, R. Malarić, (*Još jedna*) *formula za π s beskonačno ugniježđenim korijenom*, Poučak, 80 (2019.), 6-26