Diracov zapis u linearnoj algebri – primjer s nastave na stručnim inženjerskim studijima

Davor Šterc[1], Reni Banov[2], Maja Benković[3]

Uvod

Dinamičan razvoj informacijskih tehnologija u proteklih pedesetak godina doveo je do potrebe za boljim poznavanjem linearne algebre u inženjerskim znanostima. Možemo reći kako obrada velikih količina podataka gotovo više nije moguća bez upotrebe naprednih tehnika iz linearne algebre. Kolegiji iz linearne algebre standardno su sastavni dio nastavnoga programa inženjerskih studija na sveučilišnim studijima, a posljednjih godina prepoznata je potreba i za uvođenjem takvih kolegija na stručnim studijima kao sastavnom dijelu uspješnog obrazovanja modernih inženjera.

U ovom članku iznosimo svoja iskustva s nastave iz kolegija Linearna algebra na specijalističkim diplomskim stručnim studijima koji se izvode na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu [1]. Izvođenje nastave matematike na stručnim inženjerskim studijima nosi neke svoje specifičnosti. Jedna od njih odnosi se i na matematičke oznake. Najjednostavniji primjer je primjer zapisa decimalnih brojeva. Naime, iako je u hrvatskoj matematičkoj zajednici uvriježeno i opće prihvaćeno pravilo decimalne brojeve zapisivati korištenjem decimalne točke, na stručnim studijima često se prilagođavamo zahtjevima struke, pa sukladno međunarodnim i domaćim ISO normama decimalne brojeve zapisujemo korištenjem decimalnog zareza [2, 3]. Druga specifičnost ovoga konkretnog kolegija je da se izvodi na prvoj godini specijalističkog studija, dakle tek na četvrtoj godini fakultetskog obrazovanja. Studenti stručnih studija u toj su fazi usko usmjereni i zainteresirani za vlastitu inženjersku struku pa ih je potrebno dodatno motivirati za matematičke kolegije i pokazati njihove primjene. Primjerice, prilikom generalizacije pojma vektora i uvođenja vektorskih prostora jedan od najčešćih primjera je prostor polinoma. Naše je iskustvo da je studentima stručnih studija ovaj primjer često suviše apstraktan. S druge strane, naši studenti odlično reagiraju na primjer promatranja sinusoida kao vektora. Razlog je jednostavan. S tim su funkcijama, kao osnovnim vrstama signala, dobro upoznati i često su ih tijekom studija prikazivali kao kompleksne brojeve pa je prijelaz na vektore prirodan.

[1]Davor Šterc, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[2]Reni Banov, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[3]Maja Benković, studentica Tehničkog veleučilišta u Zagrebu

Iz navedenih razloga u svojoj smo nastavi na kolegiju Linearna algebra izabrali koristiti Diracov zapis za vektore i operatore. Diracova notacija primarno je razvijena za potrebe kvantne mehanike [4], a kod studenata našeg kolegija naišla je na dobar odjek te su prepoznali Diracov zapis kao koncizan i razumljiv. Nadamo se da će čitatelji, za koje pretpostavljamo da su navikli na standardne zapise u linearnoj algebri, prepoznati ideje iz kojih je zapis nastao, te da će ih naći dovoljno općenitima da se mogu primijeniti za bolje razumijevanje matematičkog alata linearne algebre. Na kraju napominjemo da, prema našima saznanjima, samo jedan matematički udžbenik pisan na hrvatskom jeziku koristi ovu notaciju. Riječ je o udžbeniku profesora Davora Butkovića [5] koji je zasigurno dobro poznavao problematiku matematičkog obrazovanja na tehničkim studijima – prije studija matematike profesor Butković završio je studij elektrotehnike i dugi je niz godina predavao matematičke kolegije na tehničkim fakultetima u Zagrebu, Splitu i Osijeku.

Osnovni elementi zapisa

U dvodimenzijskom i trodimenzijskom prostoru vektori su usmjerene dužine, zbog čega ih standardno prikazujemo strelicom $\mapsto$. Ovu oznaku zadržavamo i za generalizirane vektore, zbog čega iznad naziva vektora stavljamo oznaku strelice $\rightarrow$. Za koordinatni zapis vektora koristimo matrice u obliku stupca

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Osnovna ideja Diracova zapisa za vektore je zadržati početak $'|'$ i završetak strelice $'\rangle'$, i između njih zapisati naziv. Drugi važan oblik zapisa u vektorskom računu je zapis linearnog funkcionala (dualni vektori) za koji koristimo transponirani matrični zapis vektora (matrica redak)

$$\vec{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}.$$

Tada se skalarni i tenzorski (dijadski) umnožak dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b}$ mogu u matričnome zapisu jednostavno iskazati pomoću množenja matrica

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a})^T \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}(\vec{b})^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \cdots b_n \end{bmatrix}.$$

Budući da linearni funkcionali djeluju na vektorima, njih bismo u Diracovu zapisu označavali na sličan način kao i vektore, s time da je početak oznake $'\langle'$, dok bi završetak bio $'|'$. Na taj način dobijemo dvije osnovne oznake u Diracovu zapisu:

$|\ \rangle$ '**ket**' oznaka za vektore: $|a\rangle = \vec{a}$,

$\langle\ |$ '**bra**' oznaka za dualne vektore: $\langle b| = |b\rangle^T$.

Ovdje je potrebno napomenuti da, kada se radi s kompleksnim brojevima, prije transponiranja treba napraviti konjugiranje elemenata vektora. Sada skalarni i tenzorski umnožak poprimaju jednostavan oblik u Diracovu zapisu, pa je njihovo djelovanje bitno jasnije iskazano. Primjerice, skalarni umnožak zapisujemo u '**braket**' (eng. bracket – zagrada) oznaci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a | b \rangle,$$

dok je tenzorski umnožak zapisan u **ketbra** oznaci

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = |a\rangle\langle b|.$$

Time dolazimo do osnovne ideje Diracova zapisa koju možemo jednostavno iskazati riječima: **braket** zapis daje broj, a **ketbra** zapis rezultira matricom (operator).

Jednostavnost primjene Diracova zapisa možemo vidjeti na primjeru operatora projekcije (projektor) na pravac. Proizvoljan vektor $\vec{v}$ možemo projicirati na pravac p tako da definiramo operator projekcije P_p pomoću vektora smjera $\vec{s}$ tog pravca,

$$P_p = \frac{|s\rangle\langle s|}{\langle s|s\rangle}.$$

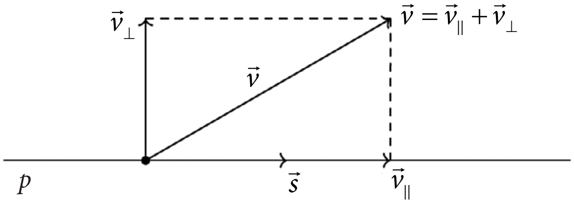
Da se radi o projekciji na pravac p, možemo zaključiti iz sljedećeg razmatranja. Jasno je kako projekcija bilo kojeg vektora $\vec{v}$ na pravac p odgovara nekom vektoru koji je paralelan s vektorom smjera

$$\vec{v}_{\parallel} = \lambda \vec{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

tj. projekcija je jednaka umnošku vektora smjera i realnog broja λ. Primijenimo li Diracov zapis za P_p, dobijemo jednostavno

$$P_p(\vec{v}) = \frac{|s\rangle\langle s|}{\langle s|s\rangle}|v\rangle = |s\rangle \frac{\langle s|v\rangle}{\langle s|s\rangle} = \lambda |s\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

gdje λ predstavlja skalarnu komponentu vektora $\vec{v}$ u smjeru vektora $\vec{s}$, tj. predstavlja duljinu vektora $\vec{v}_{\parallel}$ podijeljenu s duljinom vektora smjera.



Projekcija vektora na pravac

Također, u Diracovu zapisu jednostavno možemo provjeriti idempotentnost operatora projekcije na pravac

$$P^2 = PP = \frac{|s\rangle\langle s|}{\langle s|s\rangle}\frac{|s\rangle\langle s|}{\langle s|s\rangle} = \frac{|s\rangle\cancel{\langle s|s\rangle}\langle s|}{\cancel{\langle s|s\rangle}\langle s|s\rangle} = \frac{|s\rangle\langle s|}{\langle s|s\rangle} = P.$$

Napomena.

Diracov zapis koristimo i za definiciju Kroneckerovog (također tenzorski) umnoška dvaju ket vektora

$$|a\rangle|b\rangle = |a\rangle\otimes|b\rangle = \begin{bmatrix} a_1b_1 \\ \vdots \\ a_1b_n \\ a_2b_1 \\ \vdots \\ a_nb_n \end{bmatrix}$$

s kojim dobijemo vektore iz prostora dimenzije n^2, uz napomenu kako na taj način možemo množiti vektore iz prostora različitih dimenzija. Napomenimo kako množenje dvaju bra vektora nije definirano u Diracovu zapisu.

Ako promotrimo svojstva tenzorskog umnoška dvaju vektora

$$\begin{aligned} D_1 &= |a_1\rangle\langle b_1| \\ D_2 &= |a_2\rangle\langle b_2| \\ D_1|a\rangle &= |a_1\rangle\langle b_1||a\rangle = |a_1\rangle\langle b_1|a\rangle = \lambda|a_1\rangle, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ D_1D_2 &= |a_1\rangle\langle b_1||a_2\rangle\langle b_2| = |a_1\rangle\langle b_1|a_2\rangle\langle b_2| = \mu|a_1\rangle\langle b_2|, \quad \mu\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

dolazimo do zaključka kako primjenom tenzorskoga umnoška na vektor dobijemo novi vektor paralelan s ket vektorom iz umnoška, dok nam množenje dvaju tenzorskih umnožaka daje novi operator proporcionalan s tenzorskim umnoškom ket vektora iz prvog i bra vektora iz drugog operatora. Prethodni zaključci bitno će nam olakšati razmatranja na primjerima, posebice na ilustrativnim primjerima s vektorima u ravnini.

Primjena Diracova zapisa

Standardnu ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ čine vektori

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

koje u Diracovu zapisu pišemo u oznaci $|i\rangle, |j\rangle$. Budući da je standardna baza ortonormirana, za skalarni umnožak vektora baze vrijedi

$$\langle i \mid j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

gdje je simbol δ_{ij} Kroneckerova delta funkcija. Promotrimo projektore na koordinatne osi definirane pomoću vektora standardne baze. Njihov zbroj daje novi operator određen jediničnom matricom (operator identiteta)

$$I = |i\rangle\langle i| + |j\rangle\langle j| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se može provjeriti da će isto svojstvo vrijediti za definiciju projektora pomoću vektora iz neke druge ortonormirane baze. Drugim riječima, definicija projektora **invarijantna** je za izbor ortonormirane baze, a može se generalizirati na prostore proizvoljne dimenzije. Na isti način možemo definirati operatore određene dijagonalnim matricama. U Diracovu zapisu to znači da uvodimo realne brojeve između tenzorskog umnoška vektora ortonormirane baze

$$D = |i\rangle d_i \langle i| + |j\rangle d_j \langle j|, \quad d_i, d_j \in \mathbb{R}.$$

Naravno, izraz možemo poopćiti na višedimenzijske vektorske prostore

$$D = \sum_i |i\rangle d_i \langle i|, \quad d_i \in \mathbb{R}.$$

Važno je napomenuti kako zbog asocijativnosti množenja bra i ket vektora realnim brojem, broj možemo pisati ispred ili iza tenzorskog umnoška baznih vektora. Vidjet ćemo na primjerima kako se svojstvo asocijativnosti „isplati” te bitno olakšava provedbu vektorskog računa. Ako je riječ o svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima operatora

$$D|v\rangle = \lambda |v\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

tada Dirac uvodi (važno u kvantnoj mehanici) skraćeni zapis $\lambda|\lambda\rangle$ umjesto $\lambda|v\rangle$, čime se jasno označava kako je λ svojstvena vrijednost, a $|\lambda\rangle$ pridruženi svojstveni vektor. Štoviše, čitatelju ostavljamo za ispitati tvrdnju kako svojstvenoj vrijednosti λ kod operatora određenog simetričnom matricom (ortogonalni operator) pripada svojstveni vektor $\langle\lambda|$ u dualnom prostoru. Za primjer možemo provjeriti tvrdnju kako su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 operatora određenog simetričnom matricom D ortogonalni:

$$D|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, \quad D|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle.$$

Promotrimo umnožak $\langle\lambda_1|D|\lambda_2\rangle$ za koji smo sigurni kako predstavlja realan broj. Umnožak možemo izračunati na dva načina, slijeva ili zdesna:

$$\langle\lambda_1|D|\lambda_2\rangle = \big(\langle\lambda_1|D\big)|\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1|\lambda_1|\lambda_2\rangle = \lambda_1\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \quad \ldots \text{ "slijeva"}$$
$$\langle\lambda_1|D|\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1|\big(D|\lambda_2\rangle\big) = \langle\lambda_1|\lambda_2|\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \quad \ldots \text{ "zdesna"}$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve slijedi

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle,$$

a budući da su svojstvene vrijednosti različite, neposredno slijedi kako je skalarni umnožak svojstvenih vektora jednak nuli, čime je potvrđena njihova ortogonalnost. Za primjenu Diracova zapisa ovdje je važno napomenuti kako izraz $\langle i | D | j \rangle$ predstavlja element D_{ij} u matrici D zapisa operatora u ortonormiranoj bazi.

Dekompozicija matrice

Neka su nam zadane dvije ortonormirane baze α_i, β_i, za neki vektorski prostor, tj. vrijedi

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$
$$\langle \beta_i | \beta_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Tada možemo jednostavno definirati operator za prijelaz zapisa vektora iz jedne u drugu bazu pomoću tenzorskog umnoška baznih vektora. Primjerice, operator prijelaza zapisa vektora iz baze α_i u bazu β_i glasi

$$T_{\alpha\beta} = \sum_i | \beta_i \rangle\langle \alpha_i |.$$

Poučno je za čitatelja ovdje provjeriti (uputa: primijenite operator na bazne vektore) kako matrični zapis operatora $T_{\alpha\beta}$ predstavlja ortogonalnu matricu. Međutim, ono što nije očigledno jest činjenica kako se ubacivanjem realnih brojeva unutar tenzorskog umnoška baznih vektora može odrediti dekompozicija bilo koje druge realne matrice. Drugim riječima, u zapisu

$$D = \sum_i | \alpha_i \rangle \lambda_i \langle \beta_i |, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

odgovarajućim izborom baza i brojeva λ_i dobijemo dekompoziciju proizvoljne matrice. Primjerice, za bazu α_i uzmimo svojstvene vektore matrice DD^T, a za bazu β_i uzmimo svojstvene vektore matrice D^TD. Izborom vrijednosti $|\lambda_i|$, gdje su λ_i svojstvene vrijednosti od D, dobivamo dekompoziju singularnim vrijednostima (eng. **S**ingular **V**alue **D**ecomposition) koja je od izuzetne teorijske i praktične važnosti. Brojni algoritmi za kompresiju ili izdvajanje „značajnog" dijela slike (npr. za prepoznavanje) zasnivaju se na dekompoziciji matrice singularnim vrijednostima.

Kompozicija operatora i množenje matrica

Neka su zadana dva operatora A, B na istom vektorskom prostoru

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} | i \rangle\langle j |$$
$$B = \sum_{k,l} b_{kl} | k \rangle\langle l |.$$

Promotrimo Diracov zapis njihove kompozicije $P = AB$:

$$\begin{aligned} P &= AB \\ &= \left(\sum_{i,j} a_{ij}\,|i\rangle\langle j|\right)\left(\sum_{k,l} b_{kl}\,|k\rangle\langle l|\right) = \sum_{i,j}\sum_{k,l} a_{ij}\,|i\rangle\langle j|\,b_{kl}\,|k\rangle\langle l| \\ &= \sum_{i,j}\sum_{k,l} |i\rangle\langle j|k\rangle\langle l|\,a_{ij}b_{kl} = \sum_{i,j}\sum_{k,l} |i\rangle\langle l|\langle j|k\rangle a_{ij}b_{kl} \\ &= \sum_{i,l} |i\rangle\langle l| \left(\sum_{j,k} \langle j|k\rangle a_{ij}b_{kl}\right) = \sum_{i,l} |i\rangle\langle l| \left(\sum_{j} \langle j|j\rangle a_{ij}b_{jl}\right) \\ &= \sum_{i,l} |i\rangle\langle l| \left(\sum_{j} a_{ij}b_{jl}\right). \end{aligned}$$

Odavde vidimo kako kompozicija dvaju linearnih operatora u Diracovu zapisu ustvari predstavlja množenje matrica. Drugim riječima, elementi kompozicije određeni su umnoškom redaka i stupaca matrica iz zapisa operatora

$$P_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{l} a_{il}b_{lj}.$$

Primjenom kompozicije operatora u Diracovu zapisu možemo jednostavno pokazati osnovne geometrijske transformacije rotacije i zrcaljenja u ravnini.

Rotacija i zrcaljenje u ravnini

U standardnoj bazi, jedinični vektor pod kutom α određen je vrijednostima osnovnih trigonometrijskih funkcija

$$|\alpha\rangle = \begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{bmatrix}, \quad \langle\alpha| = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}.$$

Definirajmo dva operatora zrcaljenja u ravnini pomoću tenzorskog umnoška vektora baze. Zrcaljenje proizvoljnog vektora u odnosu na x – os postižemo operatorom

$$\sigma_x = |i\rangle\langle i| - |j\rangle\langle j| \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}x \\ -y\end{bmatrix}$$

dok se zrcaljenje u odnosu na pravac $y = x$ postiže primjenom operatora

$$\sigma = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i| \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}y \\ x\end{bmatrix}.$$

Zainteresiranom čitatelju ostavljamo lagani zadatak: Raspisivanjem treba provjeriti kako operator

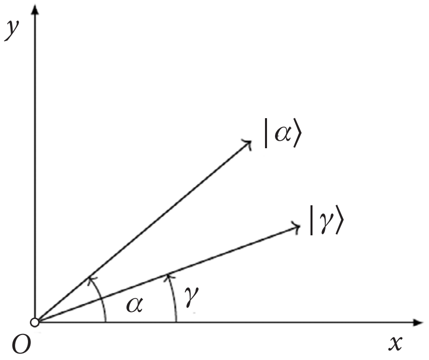
$$R(\alpha) = |\alpha\rangle\langle i| + \sigma\,|-\alpha\rangle\langle j|$$

određuje rotaciju za kut α. Poznavanjem operatora rotacije možemo jednostavno pokazati (također zadatak čitatelju) kako kompozicija dviju rotacija predstavlja rotaciju za zbroj kutova pojedinačnih rotacija.

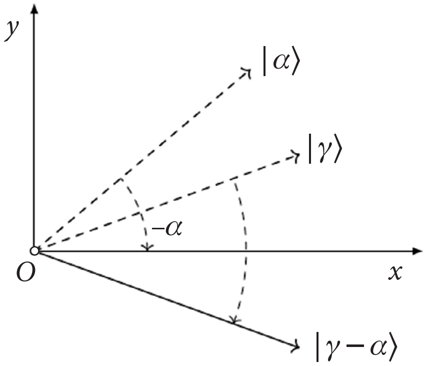
Na sličan način možemo definirati zrcaljenje u odnosu na vektor $|\alpha\rangle$

$$Z(\alpha) = R(2\alpha)\sigma_x = \big(|2\alpha\rangle\langle i| + \sigma\,|-2\alpha\rangle\langle j|\big)\sigma_x.$$

Možda definicija zrcaljenja nije očigledna, ali se može jednostavno pokazati geometrijskim razmatranjem. U prvom koraku zarotiramo vektore $|\alpha\rangle, |\gamma\rangle$ za kut $-\alpha$ tako da vektor $|\alpha\rangle$ ima smjer x – osi, dok vektor $|\gamma\rangle$ prelazi u vektor $|\gamma-\alpha\rangle$.

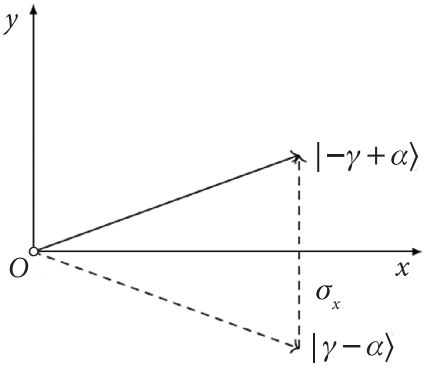


Vektori $|\alpha\rangle, |\gamma\rangle$

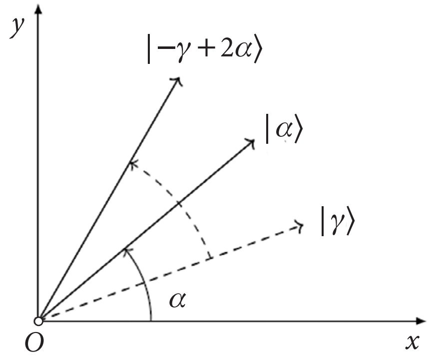


Rotacija za kut $-\alpha$

U sljedećem koraku primijenimo operator zrcaljenja σ_x, čime vektor $|\gamma-\alpha\rangle$ prelazi u vektor $|-\gamma+\alpha\rangle$. Na kraju, u zadnjem koraku rotacijom za kut α vratimo vektor $|\alpha\rangle$ u početnu poziciju, dok vektor $|-\gamma+\alpha\rangle$ prelazi u vektor $|-\gamma+2\alpha\rangle$.



Zrcaljenje oko x osi (σ_x)



Rotacija za kut α

Time je pokazano kako se zrcaljenje proizvoljnog vektora $|\gamma\rangle$ u odnosu na neki vektor $|\alpha\rangle$ svodi na rotaciju za dvostruki kut α zrcalnog vektora $|-\gamma\rangle$ u odnosu na x – os. U provedbi je primijenjen niz transformacija

$$Z(\alpha)|\gamma\rangle = R(\alpha)\sigma_x R(-\alpha)|\gamma\rangle \longleftrightarrow Z(\alpha)|\gamma\rangle = R(2\alpha)|-\gamma\rangle.$$

Sada, kada znamo kako vrijede transformacije

$$\begin{aligned} R(\alpha)|\gamma\rangle &= |\gamma+\alpha\rangle \\ Z(\alpha)|\gamma\rangle &= |-\gamma+2\alpha\rangle \end{aligned},$$

njihove se kompozicije mogu jednostavno izvesti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
R(\alpha)R(\beta)|\gamma\rangle &= R(\alpha)|\gamma+\beta\rangle = |\gamma+\alpha+\beta\rangle = \\
&= R(\alpha+\beta)|\gamma\rangle \\
R(\alpha)Z(\beta)|\gamma\rangle &= R(\alpha)|-\gamma+2\beta\rangle = |-\gamma+\alpha+2\beta\rangle = \left|-\gamma+2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right\rangle \\
&= Z\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)|\gamma\rangle \\
Z(\alpha)R(\beta)|\gamma\rangle &= Z(\alpha)|\gamma+\beta\rangle = |-\gamma-\beta+2\alpha\rangle = \left|-\gamma+2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right\rangle \\
&= Z\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)|\gamma\rangle \\
Z(\alpha)Z(\beta)|\gamma\rangle &= Z(\alpha)|-\gamma+2\beta\rangle = |\gamma-2\beta+2\alpha\rangle = |\gamma+2(\alpha-\beta)\rangle \\
&= R(2(\alpha-\beta))|\gamma\rangle.
\end{aligned}$$

Zaključak

Nadamo se kako smo ovim člankom na jednostavnim primjerima pokazali prikladnost Diracova zapisa za vektorski račun, te da će ovaj tekst potaknuti zainteresirane čitatelje na dodatno upoznavanje s elementima Diracova zapisa u linearnoj algebri. Nastojali smo primjerima pokazati zornost prikaza i na taj način djelomice olakšati početno usvajanje apstraktnih pojmova. Osobito ističemo važnost dubljeg poznavanja Diracova zapisa za sve zainteresirane koji se namjeravaju upoznati s modernim tehnologijama kao što su kvantna računala, kvantno informacijske tehnologije te brojnim drugim inženjerskim znanjima. Usvajanje tih naprednih tehnologija i znanja bez poznavanja Diracova zapisa, točnije bez poznavanja linearne algebre, čini se praktično nemogućim zadatkom. Stoga na kraju dajemo popis literature koja može poslužiti za dobar početak dugog puta. Popis literature nije ni konačan ni sveobuhvatan, ali vjerujemo kako je mnoštvo dodatne literature slobodno dostupno putem interneta te će zainteresirani čitatelj sigurno naći dovoljno materijala za proučavanje.

Literatura

1. T. Perkov, M. Orlić, T. Strmečki, I. Vuković, *Stručni studiji Tehničkog veleučilišta u Zagrebu*, Matematičko fizički list, 64(256), 276-282
2. I. Vuković, *O pisanju decimalnih brojeva*, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, **13**(49), 2012., 38-42
3. I. Vuković, D. Šterc, A. Valent, *O pisanju matematičkih znakova i operacija u završnim i diplomskim radovima iz elektrotehnike*, Zbornik radova elektrotehničkog odjela 1 (2014.) 1; 75-89
4. P. A. M. Dirac, *A new notation for quantum mechanics. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35, 1939., 416-418
5. D. Butković, *Kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2007.
6. G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley Cambridge Press, 2009.
7. P. Kaye, R. Laflamme, M. Mosca, *An Introduction to Quantum Computing*, Oxford University Press, 2007.
8. G. Strang, *Linear Algebra and Learning from Data*, Wellesley Cambridge Press, 2019.