

# Logaritamska skala

DANIELA BEROŠ<sup>1</sup>, MILENA ČULAV MARKIČEVIĆ<sup>2</sup>,  
ZLATKO LOBOR<sup>3</sup>, IVANA MARTINIĆ<sup>4</sup>

Jedna od aktivnosti tima nastavnika u okviru međunarodnoga projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) bila je osmisliti i pripremiti nastavni sat, realizirati ga više puta uz kolegijalno promatranje te potom analizirati opažanja, raspraviti o njima i kroz izmjene poboljšati nastavni sat. Odlučili smo početi s temom *Logaritamska skala*, koju smo zamislili kao uvod u logaritamsku funkciju, a nakon obrađene eksponencijalne funkcije, u trećem razredu srednje škole.

Više o samome projektu može se naći na web stranici: <https://time-project.eu/>.

## Motivacija i ciljevi

Problem nerazumijevanja logaritamske skale identificirali smo nakon potresa magnitude 5.5 na Richterovoj skali koji je 22. ožujka 2020. uzdrmao Zagreb. Nakon glavnog udara uslijedili su mnogi naknadni manji udari različitih jačina, a ljudi su bili podjednako zabrinuti bilo da se radi o potresu magnitude 4 ili o potresu magnitude 3. Pokazalo se da ne razumiju da magnituda manja za jedan stupanj znači potres koji je oko 32 puta slabiji, dok magnituda manja za dva stupnja znači 1000 puta slabiji potres, i tako dalje. Razlog leži u formuli za izračunavanje magnitude potresa prema Richteru:  $M = \frac{2}{3}(\log E - 4.8)$ . Iz nje je vidljivo da je riječ o logaritamskoj skali, a ne linearnoj na koju smo najviše navikli.

Druga aktualna tema bila je Covid-19 pandemija. U medijima se mogu pronaći raznovrsni podatci prikazani na različitim skalama, što može dovesti u zabludu ako ih se ne iščitava pažljivo i točno. Dijagram eksponencijalnog rasta izgledat će manje zastrašujuće ako podatke prikazemo koristeći logaritamsku skalu umjesto linearne. Stoga smo željeli kod učenika osvijestiti koliko je važno gledati vrijednosti na osima u grafičkom prikazu podataka prije donošenja zaključaka.

---

<sup>1</sup>Daniela Beroš, V. gimnazija, Zagreb

<sup>2</sup>Milena Čulav Markičević, V. gimnazija, Zagreb

<sup>3</sup>Zlatko Lobor, V. gimnazija, Zagreb

<sup>4</sup>Ivana Martinić, V. gimnazija, Zagreb

1	mikro	ljudi ga ne osjete, bilježe ga samo seizmografi
2	manji	ljudi ga mogu osjetiti (one iznad 3,0 najčešće osjete), rijetko uzrokuje štetu
3		
4	lagani	ljudi u zatvorenom prostoru osjete trešnju i čuju zvukove pomicanja pokućstva, ljudi na otvorenome ga ne osjete, mala je vjerojatnost nastanka štete
5	umjereni	svi ljudi ga osjete, a uzrokuje štetu na slabijim građevinama
6	jaki	ljudi ga osjete i na udaljenostima od nekoliko stotina kilometara od epicentra, uzrokuje manje štete na kvalitetnim građevinama
7	veliki	nanosi štetu većini građevina na udaljenosti 250 km od epicentra
8	razarajući	razara većinu građevina udaljenih 1000 km od epicentra, mijenja se izgled Zemljine površine
9		
10	epski	nije nikad zabilježen

Slika 1. Magnitude potresa prema Richterovoj skali (izvor: <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70926>, pozadina slike: tear by Guilhem from the Noun Project)

Budući da su eksponencijalna i logaritamska funkcija navedene u kurikulumu za treći razred srednje škole, odlučili smo se problemu linearnog mišljenja u nelinearnom svijetu baviti unutar ove teme i dati logaritamskoj funkciji drugu svrhu osim inverza eksponencijalne funkcije. Ciljano znanje ovog sata je *Primjena logaritamske skale*, sa širim ciljevima: *Razumijevanje različitih grafičkih prikaza istih podataka, Odabir odgovarajućeg grafičkog prikaza i Rješavanje problema iz stvarnog života.*

Radionicu smo zamislili s gotovo nikakvom ulogom nastavnika tijekom njena održavanja. Stoga nas je kao „nastavnike istraživače” zanimalo hoćemo li pažljivo pripremljenim materijalima uspjeti učenike navesti da samostalno zaključe da su svijetu potrebne i nelinearne skale, a zatim i koliko je bitno pažljivo čitati grafove.

## Tijek radionice

Planirano trajanje radionice je 80 – 90 minuta. Razredni odjel podijeljen je u osam skupina od po troje učenika (u idealnom slučaju). Svaka skupina dobiva jednu tablicu sa sirovim podacima (po dvije skupine rade na istim podacima) i prazan papir A3 formata. Zadatak učenika je prikazati podatke grafički u koordinatnom su-

stavu. Izabrali smo četiri različite teme jer smo željeli da učenici vide što više primjena logaritamske skale, odnosno logaritama o kojima ćemo na sljedećim satima učiti.

<p>U tablici su dani podatci o ukupnom broju zaraženih u Italiji tijekom karantene u proljeće 2020.</p> <table border="1" data-bbox="229 450 683 948"> <thead> <tr> <th>Datum (2020.)</th> <th>Ukupan broj zaraženih</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>17.2.</td><td>3</td></tr> <tr><td>24.2.</td><td>229</td></tr> <tr><td>2.3.</td><td>2038</td></tr> <tr><td>9.3.</td><td>9179</td></tr> <tr><td>16.3.</td><td>27997</td></tr> <tr><td>23.3.</td><td>63941</td></tr> <tr><td>30.3.</td><td>101723</td></tr> <tr><td>9.4.</td><td>143612</td></tr> <tr><td>16.4.</td><td>168932</td></tr> <tr><td>23.4.</td><td>189957</td></tr> </tbody> </table> <p>Prikažite ove podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu.</p>	Datum (2020.)	Ukupan broj zaraženih	17.2.	3	24.2.	229	2.3.	2038	9.3.	9179	16.3.	27997	23.3.	63941	30.3.	101723	9.4.	143612	16.4.	168932	23.4.	189957	<p>U tablici su dani podatci o koncentraciji vodikovih iona tijekom fermentacije kefiru dodanog u mlijeko.</p> <table border="1" data-bbox="721 450 1174 948"> <thead> <tr> <th>Proteklo vrijeme (u satima)</th> <th>Koncentracija vodikovih iona (mol/L)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0.000000095</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.000000240</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.000000437</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.000000912</td></tr> <tr><td>16</td><td>0.000001995</td></tr> <tr><td>20</td><td>0.000015488</td></tr> <tr><td>24</td><td>0.000028840</td></tr> <tr><td>28</td><td>0.000114815</td></tr> <tr><td>32</td><td>0.000354813</td></tr> <tr><td>36</td><td>0.001584893</td></tr> </tbody> </table> <p>Prikažite ove podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu.</p>	Proteklo vrijeme (u satima)	Koncentracija vodikovih iona (mol/L)	0	0.000000095	4	0.000000240	8	0.000000437	12	0.000000912	16	0.000001995	20	0.000015488	24	0.000028840	28	0.000114815	32	0.000354813	36	0.001584893
Datum (2020.)	Ukupan broj zaraženih																																												
17.2.	3																																												
24.2.	229																																												
2.3.	2038																																												
9.3.	9179																																												
16.3.	27997																																												
23.3.	63941																																												
30.3.	101723																																												
9.4.	143612																																												
16.4.	168932																																												
23.4.	189957																																												
Proteklo vrijeme (u satima)	Koncentracija vodikovih iona (mol/L)																																												
0	0.000000095																																												
4	0.000000240																																												
8	0.000000437																																												
12	0.000000912																																												
16	0.000001995																																												
20	0.000015488																																												
24	0.000028840																																												
28	0.000114815																																												
32	0.000354813																																												
36	0.001584893																																												
<p>U tablici su dani podatci o razini buke tijekom 20 minuta koncerta održanog u srpnju 2020.</p> <table border="1" data-bbox="229 1103 683 1601"> <thead> <tr> <th>Vrijeme mjerenja (9.7.2020.)</th> <th>Razina buke (<math>\mu\text{Pa}</math>)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>22:17</td><td>2907.568771</td></tr> <tr><td>22:19</td><td>493776.021</td></tr> <tr><td>22:21</td><td>275124.9621</td></tr> <tr><td>22:23</td><td>6645.535704</td></tr> <tr><td>22:25</td><td>911024.3723</td></tr> <tr><td>22:27</td><td>643472.5065</td></tr> <tr><td>22:29</td><td>101281.4699</td></tr> <tr><td>22:31</td><td>1075300.866</td></tr> <tr><td>22:33</td><td>1782501.876</td></tr> <tr><td>22:35</td><td>23228.97228</td></tr> </tbody> </table> <p>Prikažite ove podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu.</p>	Vrijeme mjerenja (9.7.2020.)	Razina buke ( $\mu\text{Pa}$ )	22:17	2907.568771	22:19	493776.021	22:21	275124.9621	22:23	6645.535704	22:25	911024.3723	22:27	643472.5065	22:29	101281.4699	22:31	1075300.866	22:33	1782501.876	22:35	23228.97228	<p>U tablici su dani podatci o količini oslobođene energije u potresima u Zagrebu između 22.3.2020. i 26.3.2020.</p> <table border="1" data-bbox="721 1103 1174 1601"> <thead> <tr> <th>Redni broj potresa</th> <th>Oslobođena energija (J)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.</td><td>7943300000000</td></tr> <tr><td>2.</td><td>1995300000000</td></tr> <tr><td>3.</td><td>22387002541</td></tr> <tr><td>4.</td><td>5623400000</td></tr> <tr><td>5.</td><td>1000000000</td></tr> <tr><td>6.</td><td>1412500000</td></tr> <tr><td>7.</td><td>1995300000</td></tr> <tr><td>8.</td><td>22387591200</td></tr> <tr><td>9.</td><td>3981100000</td></tr> <tr><td>10.</td><td>31623000</td></tr> </tbody> </table> <p>Prikažite ove podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu.</p>	Redni broj potresa	Oslobođena energija (J)	1.	7943300000000	2.	1995300000000	3.	22387002541	4.	5623400000	5.	1000000000	6.	1412500000	7.	1995300000	8.	22387591200	9.	3981100000	10.	31623000
Vrijeme mjerenja (9.7.2020.)	Razina buke ( $\mu\text{Pa}$ )																																												
22:17	2907.568771																																												
22:19	493776.021																																												
22:21	275124.9621																																												
22:23	6645.535704																																												
22:25	911024.3723																																												
22:27	643472.5065																																												
22:29	101281.4699																																												
22:31	1075300.866																																												
22:33	1782501.876																																												
22:35	23228.97228																																												
Redni broj potresa	Oslobođena energija (J)																																												
1.	7943300000000																																												
2.	1995300000000																																												
3.	22387002541																																												
4.	5623400000																																												
5.	1000000000																																												
6.	1412500000																																												
7.	1995300000																																												
8.	22387591200																																												
9.	3981100000																																												
10.	31623000																																												

Slika 2. Tablice sa sirovim podacima

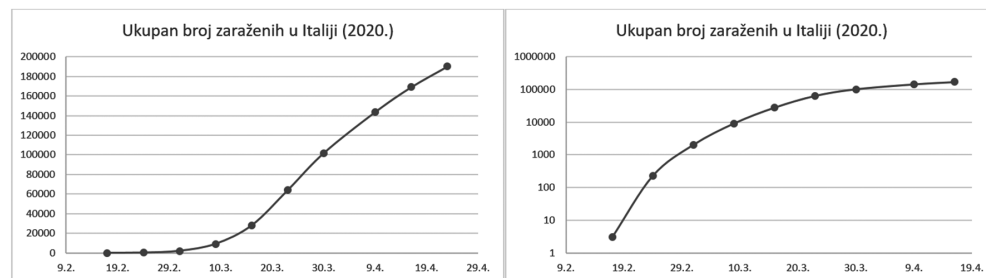
Željeli smo koristiti stvarne podatke, a dugotrajno istraživanje dovelo nas je do sljedećih izvora:

- covid: <https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/>
- kefir: [https://www.researchgate.net/publication/289069040\\_Observation\\_of\\_Lactic\\_Acid\\_Bacteria\\_and\\_Yeast\\_Populations\\_During\\_Fermentation\\_and\\_Cold\\_Storage\\_in\\_Cow's\\_Ewe's\\_and\\_Goat's\\_Milk\\_Kefirs;](https://www.researchgate.net/publication/289069040_Observation_of_Lactic_Acid_Bacteria_and_Yeast_Populations_During_Fermentation_and_Cold_Storage_in_Cow's_Ewe's_and_Goat's_Milk_Kefirs;)
- buka: Zavod za istraživanje i razvoj sigurnosti;
- potresi: <https://m.emsc.eu/>.

Iz iskustva znamo da učenicima treba dosta vremena za grafičke radove, a kako smo očekivali da će i rasprava oko načina prikaza biti žustra, odlučili smo za prvu fazu rezervirati 30 minuta. Nakon prve faze po jedan učenik iz svake skupine dolazi pred razredni odjel kako bi predstavio rad svoje skupine navodeći samo vrstu podataka koje su imali, probleme s kojima su se susreli i kako su te probleme riješili. Nastavnik u tom trenutku ne komentira njihov rad. Ovo je iznimno bitno kako ne bi utjecali niti na prezentacije sljedećih skupina niti na promišljanja učenika u drugoj fazi. Svi su dijagrami ostavljeni na ploči pričvršćeni magnetima kako bi učenici mogli jasno vidjeti kako isti podatci mogu imati različite grafičke prikaze.

U drugoj fazi svaka grupa dobiva listić s dva grafička prikaza podataka na kojima su radili (u jednom prikazu vrijednosti na ordinati su na linearnoj, a u drugom na logaritamskoj skali) te tri pitanja koja ih vode do zaključka koji je od tih prikaza bolji. Učenicima je dana uputa da pripreme kratku usmenu prezentaciju za ostatak razrednog odjela u kojoj će odgovoriti na sljedeća pitanja: *Što možete zaključiti iz danih grafova? Koje je zaključke lakše donijeti s lijevog, a koje s desnog grafa? Koji vam graf nudi bolje informacije?*

#### COVID-19 U ITALIJI

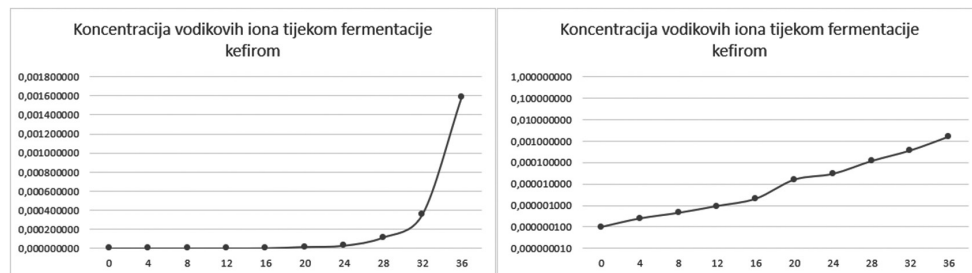


Odgovorite kao grupa na sljedeća tri pitanja.

1. Procijenite broj zaraženih na dan 30.4.2020.
2. Između koja dva trenutka je došlo do najveće promjene u broju oboljelih?
3. U kojem trenutku dolazi do usporavanja rasta broja oboljelih?

Slika 3. Radni listić – covid-19

FERMENTACIJA KEFIRA

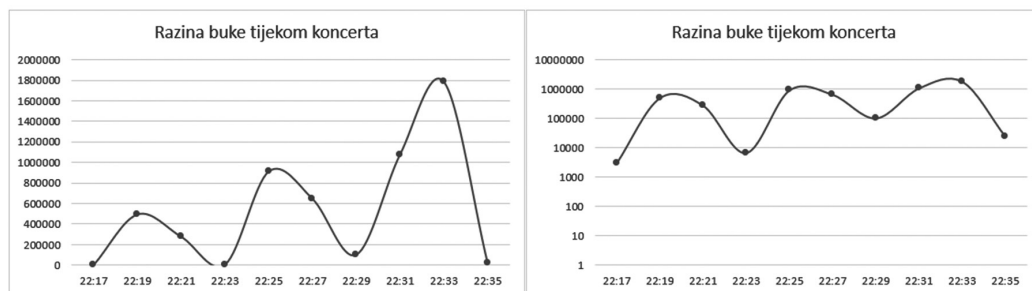


Odgovorite kao grupa na sljedeća tri pitanja.

1. Procijenite koncentraciju vodikovih iona u 40. satu.
2. Između koja dva trenutka je došlo do najveće promjene u koncentraciji vodikovih iona?
3. Koncentracija vodikovih iona iznad 0.003 sprječava fermentaciju, grumenčici kefira mogu se razgraditi, a mogu se pojaviti i druge, nepoželjne, bakterije. Nakon kojeg vremena fermentacije kefir može uzrokovati trovanje?

Slika 4. Radni listić – kefir

BUKA NA KONCERTU

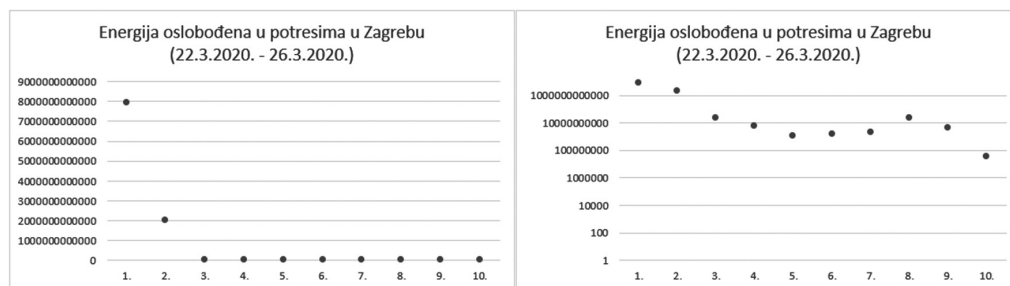


Odgovorite kao grupa na sljedeća tri pitanja.

1. Razina normalnog razgovora je oko 6500  $\mu\text{Pa}$ . Je li se mogao tijekom koncerta na trenutke voditi normalan razgovor?
2. Između koja dva trenutka je došlo do najveće promjene u razini buke?
3. Duža izloženost razini buke iznad 200000  $\mu\text{Pa}$  može uzrokovati oštećenje sluha. Koliko dugo su tijekom ovih 20 minuta posjetitelji bili izloženi toj razini buke?

Slika 5. Radni listić – buka na koncertu

POTRESI U ZAGREBU



Odgovorite kao grupa na sljedeća tri pitanja.

1. Je li oslobođeno više energije u 5. potresu ili u 8. potresu?
2. Između koja dva od prikazanih potresa je najveća promjena u količini oslobođene energije?
3. Većina ljudi osjetit će potrese kod kojih je količina oslobođene energije veća od 63095730000 J. Koje od prikazanih potresa je većina Zagrepčana osjetila?

Slika 6. Radni listić - potres

Pripremili smo odgovarajuće dijagrame i u obliku PowerPoint prezentacije kako bi učenici koji usmeno prezentiraju bolje objasnili svoju temu i argumentirali svoje zaključke. Važno je da svi učenici vide sve dijagrame, a ne samo one na kojima su radili, kako bi mogli aktivno sudjelovati u raspravi.

U završnoj fazi odvija se plenarna rasprava. Očekujemo da će učenici uočiti potrebu za logaritamskom skalom te da će zaključiti kako su oba grafička prikaza korisna, ovisno o kontekstu. U ovoj fazi bitno je pažljivo slušati učenike, zaista čuti njihove komentare i na njih se nadovezati. Nastavnik ponavlja najbolje zaključke učenika i, prema potrebi, neke dodaje. Završavamo formulama za „okus”, „sluh” i „pokret” prikazanima na prezentaciji, uz izjavu *Mi razmišljamo linearno, ali naša su osjetila na logaritamskoj skali.*

$$pH = -\log[H^+]$$

$$dB = 20 \log \frac{P}{P_0}$$

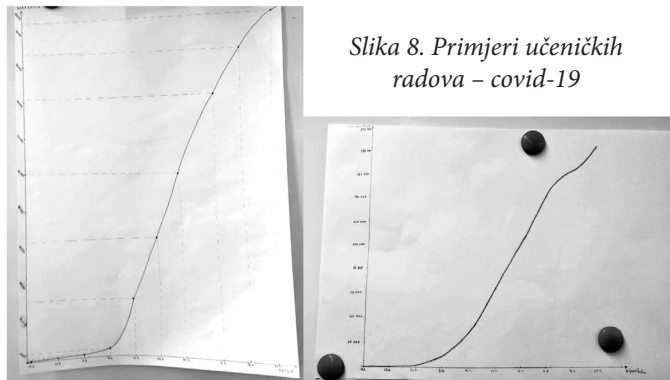
$$M = \frac{2}{3} (\log E - 4.8)$$

*Slika 7. Primjeri logaritamskih skala*

Učenici su ovime motivirani da nauče sve o oznaci *log* koja se pojavljuje u spomenutim formulama. Sada znaju da su korisne, što potiče njihovu znatiželju. Skupine koje su samostalno otkrile logaritamsku skalu bit će ponosne na svoj uspjeh.

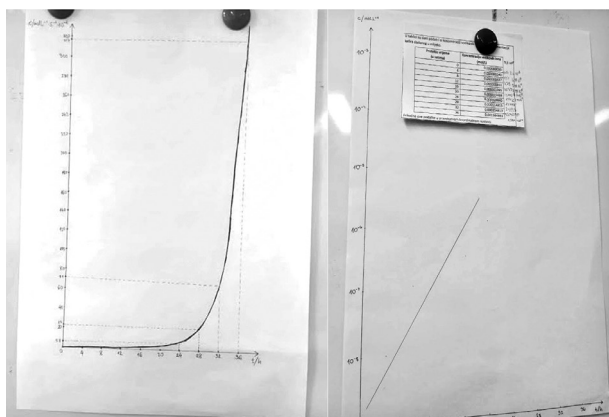
## Promatranje nastavnog sata

Nakon prve devolucije<sup>5</sup> učenici u skupinama crtaju koordinatni sustav puni samopouzdanja, i to na način na koji to obično rade – papir se okreće pejzažno, ishodište je u sredini papira, osi se nazivaju *x* i *y*, jedinična dužina jednaka je na obje osi, a mjerilo je linearno. Ali, dok gledaju podatke, susreću se s nekim problemima. Primjećuju da su sve vrijednosti pozitivne, pa zaključuju da im treba samo prvi kvadrant. Zato ishodište smještaju u donji lijevi kut papira. Neke skupine odlučuju da je bolje ako je papir okrenut portretno. Problem o kojemu se najviše raspravlja je kako sve podatke smjestiti duž *y*-osi. Neke se skupine odlučuju proporcionalno smanjiti ili povećati vrijednosti na *y*-osi (ovisno jesu li njihovi podatci vrlo mali poput kefira ili vrlo veliki poput jačine potresa), a neke dolaze na ideju prikazati potencije broja 10.

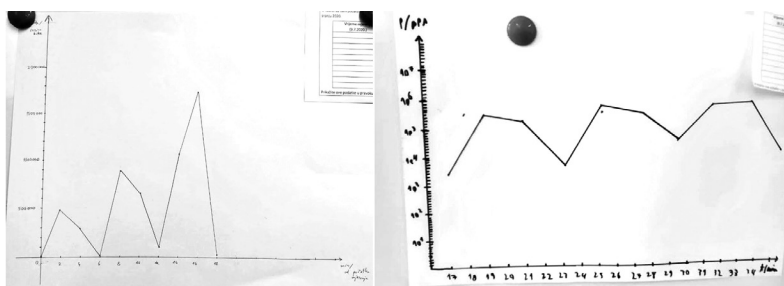


*Slika 8. Primjeri učeničkih radova – covid-19*

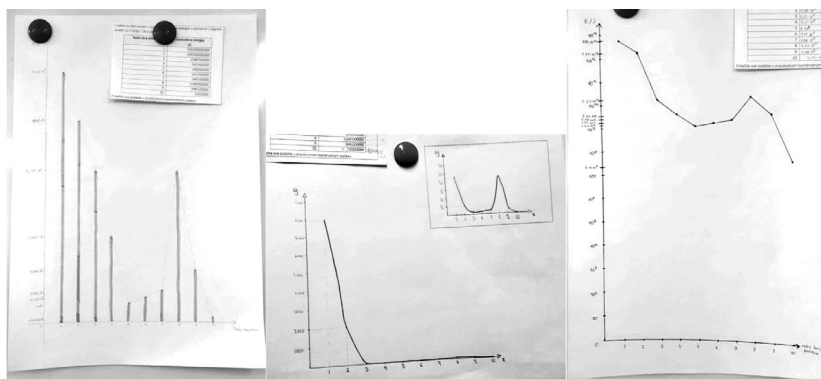
<sup>5</sup>Devolucija (primopredaja) je faza nastavnog sata tijekom koje nastavnik okruženje predaje učenicima, odnosno prenosi odgovornost za rješavanje problema na učenike.



*Slika 9. Primjeri učeničkih radova – kefir. Jedna je skupina istaknula kako jedna točka ne stane na papir, a bila bi 150 cm iznad njega.*



*Slika 10. Primjeri učeničkih radova – buka*



*Slika 11. Primjeri učeničkih radova – potres. Neke su skupine shvatile i utvrdile da se graf potresa ne može kontinuirano prikazivati – on mora biti diskretan. Zanimljivo je kako je jedna je skupina izdvojila i uvećala dio grafa.*

Nakon druge devolucije učenici raspravljaju o pitanjima koja su dobili na listićima. Glavni zaključci tijekom prezentacije grupnog rada bili su:

- Oba su dijagrama dobra, ovisno o informacijama koje tražite.
- Linearna skala daje nam bolju sliku stvarnih podataka, ali teško je ubaciti sve podatke.
- Logaritamska skala rješava problem stavljanja podataka različitih redova veličine na jedan graf, ali može zavarati.



- Na linearnoj skali vidimo apsolutnu promjenu, na logaritamskoj skali vidimo brzinu promjene.
- Moramo jako paziti na ono što piše na osima.

Ova je radionica izvedena u tri različita razredna odjela. Nakon svake radionice prikupili smo povratne informacije učenika. Ovo su neke od njih:

- *Naučio sam da moram obratiti više pažnje na osi grafova. Isto tako naučio sam da je ovo zapravo korisno u pravom životu.*
- *Iznenadio sam se kako se razlikuju grafovi čija je jedina razlika raspored vrijednosti na y osi.*
- *Iznenadio sam se koliko se podatcima može manipulirati prikazujući ih grafički.*
- *Naučio sam o razlici između linearne i logaritamske skale, „prirodnosti” prve, ali i korisnosti druge.*
- *Naučio sam da se podatci mogu prikazati na više načina u više skala i grafikona, te da svaka metoda ima svoje prednosti u čitanju nekih potrebnih informacija.*
- *Naučio sam bolje crtati i čitati grafove, paziti što piše na osima, a ne samo gledati brojeve; prvi put vidio sam grafove na logaritamskoj skali i usporedio ih s normalnima, zabavio se...*

Vidjevši komentare učenika, znali smo da smo ostvarili cilj ovoga promatranja sata.

Napominjemo da učenicima treba najmanje 30 minuta za prvu fazu, a 10-15 minuta dovoljno je za rad na pitanjima. Svakako treba ostaviti dovoljno vremena za završne prezentacije, raspravu i formulaciju nastavnika. Nastavnici bi se trebali pobrinuti da učenici predstavljaju samo ono što se od njih traži, a ne i cjelokupni rad. Dobro je potaknuti učenike da napišu pojedinačne povratne informacije jer ih na ovaj način natjerate da razmišljaju i prenose riječima ono što su naučili. A ako to izraze riječima, bolje pamte. Kako bi dijagrami bili uredniji i vidljiviji, bilo bi dobro učenicima podijeliti flomastere i veliko ravnalo.

## Rasprava i zaključci

Ovo je bio prvi put da smo kao tim osmislili radionicu, i to smo činili „naopačke“ – nismo počeli od sadržaja koji trebamo prenijeti učenicima, već razmišljanjima o misiji škole, pa smo preko općenitih ciljeva koje želimo dotaknuti kroz cijelu nastavu matematike i prebiranjem tema koje su učenicima i/ili nama izazovne došli do konkretne teme. Imali smo mnoge sastanke, puno smo istraživali samu temu i nekoliko puta mijenjali koncept.

Nadali smo se da smo materijale dovoljno dobro pripremili i da će rad nastavnika tijekom radionice zaista biti minimalan. No, prije prvog promatranja sata još uvijek nismo znali što očekivati i to je bilo uzbudljivo, činilo se da smo dobro izabrali cilj promatranja sata.

Radionica je bila vrlo uspješna, učenici su uspjeli otkriti logaritamsku skalu, primijetili su važnost pažljivog čitanja grafova i razumjeli stvarnost logaritama - matematika je postala relevantna. U završnoj fazi nastavnik je samo trebao reći „Da, bili ste u pravu.” jer su rekli sve što im je postavljeno kao cilj.

Pitanje koje ostaje otvoreno je hoće li ova radionica pomoći učenicima da bolje prihvate sam pojam logaritma. Istražujemo dalje.

Rad na ovom projektu naveo nas je da više razgovaramo o samoj matematici, njenim i našim ciljevima, ciljevima za učenike i ciljevima za nastavnike. Zajedničkim radom napravili smo da se uspjeh multiplicira, a neuspjeh dijeli.