UDK 528.381:528.181(497.1)
Pregledni članak

GLOBALNA TOČNOST MREŽE II NVT SFRJ S OBZIROM NA SPEKTRALNE KRITERIJE

Željko HEĆIMOVIĆ, Asim BILAJBEGOVIĆ, Željko BAČIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Metodom spektralne dekompozicije matrice kofaktora nepoznatih parametara dobiven je uvid u globalnu točnost mreže drugog nivelmana visoke točnosti (II NVT) SFRJ. Stohastički model definiran je s obzirom na kriterije Ujedinjene evropske nivelmanske mreže. Variranjem dizajna 0. i 2. reda dobiveni su spektri svojstvenih vrijednosti matrice kofaktora nepoznatih parametar mreže na osnovi kojih je prezentiran grafički uvid u globalnu točnost mreže.

1. UVOD

Funkcionalni i stohastički model definiraju dizajn geodetske mreže, a njegovim ispitivanjem možemo dobiti podatke o kvaliteti mreže. Primjenom metode spektralne dekompozicije (SD) na matricu kofaktora nepoznatih parametara mreže, koja sadrži informacije o njihovoj točnosti, dobivamo svojstvene vrijednosti na osnovi kojih možemo dobiti uvid u globalnu točnost mreže, a da pri tome pogreške mjerenja nemaju utjecaja.

Matricu kofaktora nepoznatih parametara mreže možemo interpretirati kao n-dimenzionalni hiperelipsoid pouzdanosti, čije su poluosi proporcionalne drugom korijenu svojstvenih vrijednosti, tj.

$$A_i = \sigma_0 \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\chi^2_{f,1-\alpha}}, \qquad (1)$$

gdje su:

A_i — poluosi hiperelipsoida,
λ_i — svojstvene vrijednosti matrice kofaktora parametara mreže,
σ_0 — standardna devijacija jedinice težine,
$\chi^2_{f,1-\alpha}$ — kritična vrijednost χ^2_1 razdiobe,
f — broj stupnjeva slobode,
α — nivo signifikantnosti,

* Željko Hećimović, dipl. inž., prof. dr. Asim Bilajbegović, Željko Bačić, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

a svojstveni vektori definiraju smjerove poluosi. Centar hiperelipsoida je definiran vektorom nepoznatih parametara mreže. Nepoznati parametri mreže su najnetočnije određeni u smjeru najveće poluosi, iz čega proizlazi globalni kriterij optimiranja geodetskih mreža

$$\lambda_{max} \rightarrow \min. \tag{2}$$

Međutim, hiperelipsoid može biti znatno deformiran u smjeru najveće poluosi. Zbog toga se često postavlja uvjet da je volumen hiperelipsoida minimalan

$$\prod_{i=1}^{n=d} \lambda_i \rightarrow \min, \tag{3}$$

ili uvjet da je suma kvadrata poluosi hiperelipsoida minimalna

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\,(Q\hat{x}\hat{x}) \rightarrow \min, \tag{4}$$

gdje je n broj nepoznatih parametara, a d defekt mreže.

Tražimo li homogenom rasporedu točnosti mreže, postavit ćemo uvjet da poluosi hiperelipsoida budu po mogućnosti jednake, tj. da su svojstvene vrijednosti što bliže tome da budu jednake, odnosno da je

$$\lambda_{max}/\lambda_{min} \rightarrow 1, \tag{5}$$

ili

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} \rightarrow \min.$$

Metoda SD je svoju značajnu primjenu našla u postupcima optimiranja geodetskih mreža. Prilikom optimiranja mreže postavljaju se uvjeti s obzirom na veličinu i oblik hiperelipsoida, odnosno postavljaju se uvjeti s obzirom na svojstvene vrijednosti matrice kofaktora koje definiraju hiperelipsoid, a na osnovi postavljenih uvjeta inverznim postupkom dobiva se dizajn mreže. U našem slučaju dizajn mreže je definiran, a elementi hiperelipsoida služe za dobivanje uvida u točnost mreže. Iako je dizajn mreže definiran, varirani su dizajn 0. reda, jer metoda je ovisna o datumu mreže, i dizajn 2. reda, da bi se dobio što bolji uvid u točnost mreže i metodu rada. Globalnom točnošću mreža na osnovi spektralne dekompozicije matrice kofaktora nepoznatih parametara, između ostalih, bavili su se Pelzer (1980), Heinrickh (1982), Niemeier (1985b), Crosilla (1985), Jager (1988), Jager, Drixler (1989) Ninkov (1989), Jager, Vogel (1990a), Jager, Vogel (1990b).

2. FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Funkcionalni model nivelmanske mreže definirat ćemo pomoću

$$E(l) = A\,x, \tag{6}$$

gdje su

$E(l)$ — očekivana vrijednost slučajnog vektora mjerenih veličina,
A — konfiguracijska matrica,
x — vektor nepoznatih parametara modela.

Stohastički model definiran je prema standardu za United European Levelling Network (UELE) izjednačenje 86 (v. Erhnsperger, Kok 1987.) matricom kofaktora mjerenih veličina

$$Q_{ll}^{-1} = P = \mathrm{diag}\,(p_{11}, p_{22}, \ldots, p_{mm}), \tag{7}$$

gdje je

$$p_{ii} = \frac{D_{sr}}{t^2\,L} \tag{8}$$

t — zatvaranje figura,
D_{sr} — srednja duljina u kilometrima (za UELN Dsr = 200),
L — duljina strane u kilometrima.

3. SPEKTRALNA DEKOMPOZICIJA

Matrica normalnih jednadžbi N sadrži informacije o geometriji i stohastičkom karakteru geodetske mreže

$$N = A^T Q_{ll}^{-1} A, \qquad n = A^T Q_{ll}^{-1} l.$$

U slučaju slobodne nivelmanske mreže nedostaju parametri koji definiraju mrežu u odnosu na visinski datum. Da bismo definirali unutarnji datum (relativnu geometriju) slobodne mreže, moramo definirati jednodimenzionalni vektorski nulti prostor ortogonalan na vektorski prostor redaka konfiguracijske matrice. U slučaju nivelmanske mreže možemo nulti prostor definirati pomoću jednostupčaste matrice G = (i,... i) ili, kao što je urađeno u ovom radu, možemo primijeniti metodu spektralne dekompozicije matrice normalnih jednadžbi, čime ćemo ujedno izvršiti i dekompoziciju na ortogonalne vektorske potprostore (Teunissen 1985, Kielbasinski, Schwetlick 1980, Hećimović 1991).

$$N = [H_1\ H_2] \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ H_2^T \end{bmatrix} = H_1\,\Lambda^{-1}\,H_1^T. \tag{9}$$

Svojstvene vrijednosti matrice kofaktora $Q\hat{x}\hat{x}$ inverzne su stvojstvenim vrijednostma matrice normalnih jednadžbi N, a svojstveni vektori za obadvije matrice su isti. Nepoznate parametre dobit ćemo pomoću izraza

$$\hat{x} = N^{+} n = Q\hat{x}\hat{x}\, n = H_1 \Lambda H_1^T n, \tag{10}$$

gdje su

Λ — matrica svojstvenih vrijednosti matrice kofaktora $Q\hat{x}\hat{x}$ za $\lambda_i > O$ $(i = 1, \ldots, r)$, gdje je r rang od N,

Λ^{-1} — matrica svojstvenih vrijednosti matrice normalnih jednadžbi N, za $1/\lambda_i > O$ $(i = -, \ldots, r)$, gdje je r rang od N,

H_1 — matrica svojstvenih vektora s obzirom na $\lambda_i > O$,

H_2 — matrica svojstvenih vektora s obzirom na $\lambda_i = O$ $(i = 1, \ldots, d)$, gdje je d defekt mreže,

$Q\hat{x}\hat{x}$ — matrica kofaktora nepoznatih parametara mreže,

$\hat{x}$ — procijenjena vrijednost nepoznatih parametara.

Nepoznati parametri slobodne mreže zadovoljavat će uvjet Moore-Penrose inverzije

$$\min_{x} |\hat{x}|^2. \tag{11}$$

Ako nas zanimaju vrijednosti dobivene pomoću izjednačenih nepoznatih parametara ili ako se mrežom naknadno koristimo, npr. za periodična opažanja u deformacionoj analizi, zanimat će nas funkcije

$$\hat{y} = f^T \hat{x}$$

dobivene na osnovi nepoznatih parametara mreže, a njihove varijance dobit ćemo pomoću izraza

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 = \hat{\sigma}_0^2 f^T Qxx\, f.$$

Granične vrijednosti varijacije bilo koje funkcije možemo dobiti pomoću Reyleighova kvocijenta

$$\lambda_{min} \leq \frac{f^T Q\hat{x}\hat{x}\, f}{f^T f} \leq \lambda_{max}. \tag{12}$$

Zanima li nas funkcija parametara mreže određena s najmanjom točnošću, možemo primijeniti izraz

$$p_1 = h_1 \sqrt{\lambda_{max}}, \tag{13}$$

gdje je

λ_{max} — maksimalna svojstvena vrijednost,
h_1 — svojstveni vektor koji pripada λ_{max}.

Veličina pi se u analizi globalne točnosti mreže naziva prvom glavnom komponentom (Niemeier 1985a) i ekvivalentna je najvećoj poluosi hiperelipsoida.

4. DEFINIRANJE MODELA

Dizajn II NVT ispitivan je u pet modela. Dizajn O. reda definiran je za neslobodnu mrežu (visina repera A463 Maglaj nepromjenjiva) i slobodnu mrežu. Dizajn 2. reda definiran je s obzirom na a priori stohastički model i bez a priori stohastičkog modela, tj. P = I (gdje je I jedinična matrica), te s obzirom na stohastički model definiran za UELN (v. tab. 1). U ispiti-

Tablica 1. Pregled modela

	mreža je izjednačena kao	a priori stohastički model	primjedbe
Model 1	neslobodna	nije uveden	visina repera A463 Maglaj nepromjenjiva
Model 2	neslobodna	uveden	visina repera A463 Maglaj nepromjenjiva
Model 3	slobodna	nije uveden	
Model 4	slobodna	uveden	
Model 5	slobodna	uveden	D_{sr} = 200 km

vanja nisu uključeni slijepi vlakovi na granicama niti prema mareografima, a mjerenje, koje se s obzirom na data snooping metodu, ponašalo kao da sadrži grubu pogrešku (Bilajbegović i dr. 1990b) izbačeno je iz svih modela (v. sl. 2).

5. GLOBALNA TOČNOST II NVT SFRJ

Svojstvene vrijednosti ovise i o konfiguraciji mreže. Zbog toga ne postoje jedinstveni kriteriji o iznosu numeričkh vrijednosti koje globalni kriteriji trebaju zadovoljiti da bismo mogli zaključivati o kvaliteti mreže. Ali možemo promatrati relativne odnose između modela (v. sl. 1 i tab. 2).

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{m - n - d} \tag{14}$$

Tablica 2. Pregled rezultata

	Model 1	Model	Model 3	Model 4	Model 5
d	0	0	1	1	1
λ_{max}	76.5453	22.4901	22.8593	7·8372	3.5667
λ_{min}	0.1663	0.01[illegible]4	0.1663	0.0154	0.0070
$\Sigma\lambda$	156.2975	51.5175	83.2720	30.2973	13.7882
$\Pi\lambda$	$4.61 \cdot 10^{-19}$	$2.46 \cdot 10^{-54}$	$6.49 \cdot 10^{-21}$	$3.46 \cdot 10^{-56}$	$4.04 \cdot 10^{-80}$
$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$	460.2844	1460.3961	137.4582	508.9091	509.5286
$\lambda_{max} - \lambda_{min}$	76.3790	22.4747	22.6930	7.8218	3.5597
$\|x\|^2_{GPU}$	0.0096	0.0101	0.0073	0.0075	0.0075
σ_0 GPU	0.0062	0.0093	0.0062	0.0093	0.0138

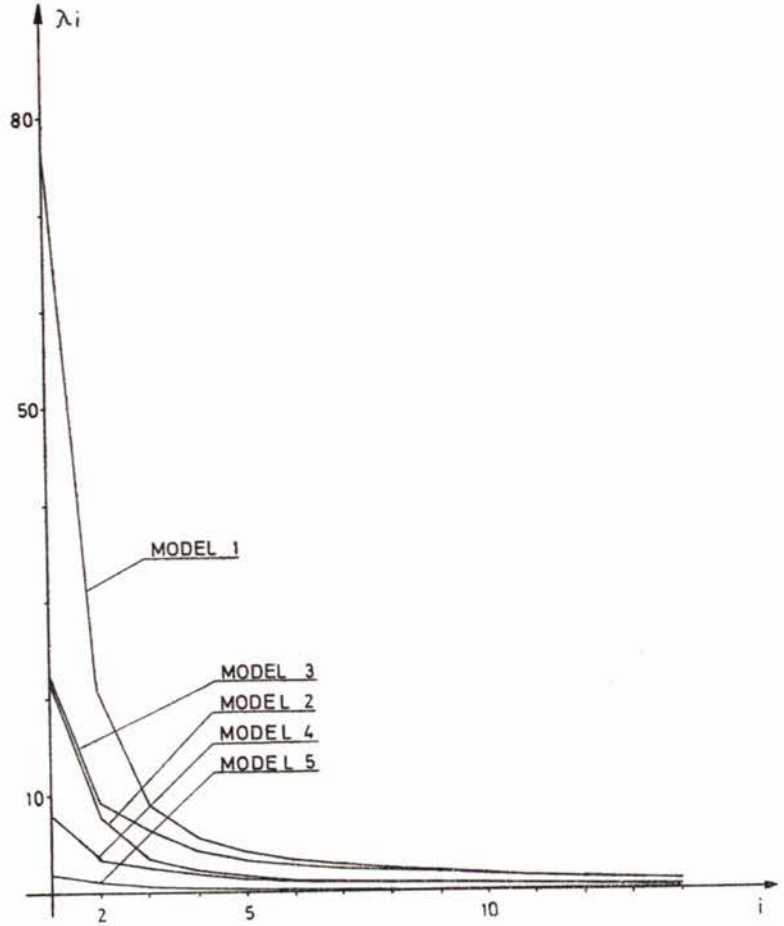
gdje je

m — broj mjerenja,
n — broj nepoznanica,
d — defekt mreže,
v — vektor popravaka,
GPU — geopotencijalna jedinica (GeoPotential Unit).

Uspoređivanjem spektara svojstvenih vrijednosti za pojedini model vidimo da se uvođenjem stohastičkog modela dobivaju manje svojstvene vrijednosti, a time i veća točnost vektora parametara mreže. Kao što se iz tablice 2 vidi, modeli 5 i 4 najbolje zadovoljavaju sve kriterije globalne točnosti osim uvjeta homogenosti mreže.

Iako se n-dimenzionalni hiperelipsoid ne može grafički pogodno predstaviti u ravnini, grafički uvid u globalnu točnost mreže možemo dobiti pomoću komponenti svojstvenog vektora s obzirom na najveću svojstvenu vrijednost. Na sl. 2 prikazana je globalna točnost mreže za model 4. Nepoznati parametri mreže u rubnim dijelovima mreže, dijelovima koji su najviše udaljeni od nagibne osi, određeni su s manjom točnošću. Globalna točnost mreže u smjeru okomitom na nagibnu os je manja.

Primijeni li se mreža II NVT za ispitivanje recentnih vertikalnih pomaka, vertikalni pomaci u smjeru okomitom na nagibnu os moći će se odrediti s manjom točnošću.



Sl. 1. Spektri svojstvenih vrijednosti matrica $Q_{\hat{x}}$

S obzirom na globalnu tektoniku ploča na području Jugoslavije u skladu s Wegenerovom mobilističkom teorijom (Herak 1986) i na diskretna vertikalna gibanja na mareografskim stanicama (Bilajbegović i dr. 1990a) mala je vjerojatnost da se cijelo područje Jugoslavije ponaša kao jedinstvena geotektonska ploča i da dolazi do globalnog vertikalnog gibanja oko nagibne osi.

Slika 2. Globalna točnost mreže II NVT Jugoslavije za model 4. Nivelmanski vlak izvučen crtkano nije zadovoljio data snooping metodu

LITERATURA

Bilajbegović, A., Bačić, Ž., Hećimović, Ž. (1990a): The New Yugoslav Vertical Datum, Workshop on Precise Vertical Positioning, Hannover 1990. (bit će publicirano u zborniku simpozija).

Bilajbegović, A., Bratuljević, N., Bačić Ž., Hećimović, Ž. (1990b): The 2nd Yugoslav High Precision Levelling Network, Workshop on Precise Vertical Positioning, Hannover, 1990. (bit će publicirano u zborniku simpozija).

Crosilla, F. (1985): A Criterion Matrix for Deforming Networks by Multifactorial Analysis Techniques. U Grafarend, E. W.; Sanso, F. (Ed.): Optimization and Design of Geodetic Networks, Springer Verlag, 1985, 429—435.

Ehrnsperger, W.; Kok, J. J. (1987): Status and Results of the 1986 Adjustment of the United European Levelling Network (Ed.): Determination of Heights and Heights Changes, Dümmler, Bonn, 1987, 7—15.

Hećimović, Ž. (1991): Prilog interpretaciji problema izjednačenja, Geodetski list 1991, 10—12, 339—356.

Heinrich, W. (1982): Second Order Desing of Geodetic Networks by an Iterative Approximation of a Given Criterion Matrix, DGK, B-258/III, 113—127.

Herak, M. (1986): A New Concept of Geotectonics of the Dinarides, Acta Geologica, Vol. 16/1, 1—42.

Jäger, R. (1988): Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen kriterien und mechanische Analogien, DGK, C—342, München 1988.

Jäger, R.; Drixler, E. (1989): Netzoptimierung im Design 0. und 1. Ordnung, AVN 1989) 7, 264—281.
Jäger, R.; Vogel, M. (1990a5: Theoretisches Konzept zum Design 1., 2., 3. und 0. Ordnungmittels analytischer Differentiation der Kovarianzmatrix und spektralem Ansatz für Kriteriummatrix—Zielfunktionen, ZfV 1990, 10, 425—436.
Jäger, R.; Vogel, M. (1990b): Kriteriummatrix—orientirte Netzoptimierung im Design 0. bis 3. Ordnung, ZfV, 1990, 11, 473—481.
Kielbasinski, A.; Schwetlick, H. (1988): Numerische lineare Algebra, VEB Detscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
Niemeier, W. (1985a): Netzqualität und Optimierung. U Pelzer, H. (Ed.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer, Stuttgart 1985, 153—224.
Niemeier, W. (1985b): Anlage von Oberwachungsnetzen. U Pelzer, H. (Ed.): Geodätische Netze in Landes- und Ingeniervermessung II, Konrad Wittwer, Stuttgart, 1985, 527—558.
Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Naučna knjiga, Beograd 1989.
Pelzer, H. (1980): Some Criteria for the Accuracy and the Reliability of Networks, DGK, B—252, 55—67.
Teunissen, P. (1985): Zero Order Design. U Grafarend, E. W.; Sanso, F. (Ed.): Optimization and Design of Geodetic Networks, Springer Verlag, Berlin 1985, 11—55.

GLOBAL ACCURACY OF THE 2ND YUGOSLAV HIGH PRECISION LEVELLING NETWORK WITH REGARD TO SPECTRAL ANALYSIS CRITERIA

An insight into the global accuracy of the 2nd Yugoslav high precision levelling network is achieved using the spectral decomposition of colocator matrix of unknown parameters. A stohastic model is defined in accordance with the criteria of the United European Levelling Network. The 0th and the 2nd order designs are subject to variations. The obtained eigenvalue spectrums and the global network accuracy are graphically presented.

Primljeno: 1991-07-18