UDK 528.181.001
Pregledni članak

PRILOG INTERPRETACIJI PROBLEMA IZJEDNAČENJA

Željko HEĆIMOVIĆ — Zagreb*

SAŽETAK: Predočene su osnovne zakonitosti determinističkog karaktera problema izjednačenja, zasnovane na zakonitostima linearne algebre u konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima s obzirom na četiri osnovna potprostora matrične teorije. Problem u slučaju nepotpunog ranga stupaca konfiguracijske matrice riješen je metodom dekompozicije matrice na singularne vrijednosti (DSV). Izjednačenje primjenom DSV-metode provedeno je u skladu s teorijom najmanjih kvadrata, a u slučaju primjene generalizirane inverzije s obzirom na uvjete Moor-Penroseove inverzije. Ortogonalne projekcije vektora mjerenih veličina s obzirom na metodu najmanjih kvadrata izvršene su pomoću ortogonalnih projektora. U dodatku je dan numerički primjer.

1. UVOD

Problemi definirani na beskonačno dimenzionalnim vektorskim prostorima mogu se aproksimirati problemima definiraim na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima kao problemi graničnih vrijednosti uz primjenu linearnih preslikavanja. Budući da pri praktičnim radovima ne raspolažemo beskonačnim skupom mjerenih veličina, problem rješavanja sistema linearnih jednadžbi promatrat ćemo kao skup preslikavanja na linearnim, konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima, za razliku od pristupa izjednačenju kao problemu na kontinuiranim vektorskim prostorima.

Matematički model ima funkciju da poveže mjerene veličine i parametre modela i ima značajnu ulogu pri dizajniranju eksperimenta (mjerenja) i obradi podataka. Općenito matematički model možemo predstaviti pomoću izraza

$$f(y, x) \simeq 0,$$

gdje je f skup funkcija koje definiraju model, y skup mjerenih veličina (veličina koje u modelu smatramo mjerenima), a x skup parametara modela

* Željko Hećimović, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

(najčešće nepoznatih). Mjerene veličine ponašaju se kao slučajne (stohastičee) varijable i definiraju stohastički karakter modela, a funkcionalni dio definira deterministički karakter modela, koji međusobno nisu konzistentni.

2. PRELIMINARNE PRETPOSTAVKE

Pod *vektorskim prostorom* $\mathscr{R}^n$ nad poljem realnih brojeva R podrazumijevat ćemo neprazan skup vektora za koje je definirano zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom

1) $(x_1 + x_2) \in \mathscr{R}^n$ za svaki par vektora $x_1, x_2 \in \mathscr{R}^n$,

2) svakom paru (α, x) $(\alpha \in R, x \in \mathscr{R}^n)$ pridružen je jedan vektor αx,

Za navedene operacije mora biti zadovoljeno osam aksiomatskih svojstava zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom (v. Kurepa 1980).
Vektorski prostor $\mathscr{R}[A^T]$ koji zadovoljava

$$\mathscr{R}[A^T] \subset \mathscr{R}^n, \qquad \mathscr{R}[A^T] \neq \mathscr{R}^n \qquad \text{i} \qquad \mathscr{R}[A^T] \neq (0)$$

zvat ćemo *vektorskim potprostorom* vektorskog prostora $\mathscr{R}^n$. Realan broj pridružen svakom paru vektora $x^T y$ definira skalarni produkt, a vektorski prostor na kojem je na taj način definiran *skalarni produkt* nazivamo *euklidski vektorski prostor. Normu* ili *duljinu vektora* x definirat ćemo izrazom

$$|x| = \sqrt{x^T x}.$$

Za dva vektora reći ćemo da su *ortogonalna* ako je njihov skalarni produkt jednak nuli, tj. ako je

$$x^T y = 0.$$

Skup svih linearno nezavisnih vektora čijom se linearnom kombinacijom može predstaviti bilo koji vektor vektorskog prostora definira *bazu vektorskog prostora.* Jedan vektorski prostor može imati više baza, a sve baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora imaju jednak broj elemenata. Broj elemenata baze vektorskog prostora definira *dimenziju* (rang) konačno dimenzionalnog vektorskogo prostora, što ćemo označiti s dim $\mathscr{R}^n$, gdje indeks n označava dimenziju prostora.

Matricu A dimenzija (m, n) možemo predočiti kao skup vektora stupaca $A = [a_1 \; a_2 \ldots a_n]$ ili kao skup vektora redaka $A^T = [\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_m]$ kojima definiramo vektorski prostor. Ako je za vektorski prostor $\mathscr{R}^n$ definirana jedna od baza $A = (a_1 \; a_2, \ldots, a_n)$, preslikavanje baze A u vektorski prostor $\mathscr{R}^m$ možemo definirati pomoću *linearnog operatora* $A : \mathscr{R}^n \rightarrow \mathscr{R}^m$ koji mora zadovoljavati uvjete

1) $A(a_1 + a_2) = A(a_1) + A(a_2), \qquad a_1, a_2 \in \mathscr{R}^n,$

2) $A(\alpha a) = \alpha A(a), \qquad a \in \mathscr{R}^n, \; \alpha \in R.$

Potprostor prostora $\mathscr{R}^m$ koji sadrži vrijednosti preslikanih elemenata s prostora $\mathscr{R}^n$ zvat ćemo *slika operatora* preslikavanja i označit ćemo ga Im A, odnosno

$$\mathrm{Im\,A} = \mathrm{A\,x}.$$

Skup svih vektora prostora $\mathscr{R}^n$ koji se preslikavaju u nul-vektor prostora $\mathscr{R}^m$, s obzirom na operator A, tvore *nul-prostor* ili *jezgru operatora* A i označit ćemo ga $\mathscr{N}[\mathrm{A}]$ ili Ker A

$$\mathrm{Ker\,A} = \mathscr{N}\,[\mathrm{A}] = (\mathrm{x}|\mathrm{Ax} = 0).$$

Nul prostor je podskup elemenata prostora $\mathscr{R}^n$ čija slika je jednaka nuli.

Rang linearnog operatora $\mathrm{A} : \mathscr{R}^n \rightarrow \mathscr{R}^m$ definira dimenziju vektorskog prostora slike operatora A, a *defekt linearnog operatora* A jednak je dimenziji njegove jezgre

$$\mathrm{def\,A} = \mathrm{dim\,Ker\,A}.$$

Vektorske potprostore $\mathscr{R}[\mathrm{A^T}]$ i $\mathscr{N}[\mathrm{A}]$ vektorskog prostora $\mathscr{R}^n$ za koje je zadovoljeno

$$\mathscr{R}\,[\mathrm{A^T}] + \mathscr{N}\,[\mathrm{A}] = \mathscr{R}^n \quad \mathrm{i} \quad \mathscr{R}\,[\mathrm{A^T}] \cap \mathscr{N}\,[\mathrm{A}] = (0)$$

zvat ćemo *komplementarnim* vektorskim potprostorima $\mathscr{R}^n$ što ćemo predstaviti izrazom

$$\mathscr{R}\,[\mathrm{A^T}] \oplus \mathscr{N}\,[\mathrm{A}] = \mathscr{R}^n.$$

3. INTERPRETACIJA DETERMINISTIČKOG PROBLEMA IZJEDNAČENJA

Vezu mjerenih veličina i parametra modela predočit ćemo kao *linearno preslikavanje*

$$\mathscr{R}^n \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathscr{R}^m, \tag{1}$$

gdje je

A — linearan operator,
$\mathscr{R}^n$ — prostor parametara modela.
$\mathscr{R}^m$ — prostor mjernih veličina.

Linearnom operatoru $\mathrm{A} : \mathscr{R}^n \rightarrow \mathscr{R}^m$ koji vrši jednoznačno preslikavanje može se pridružiti samo jedna matrica, koja ovisi o izboru baza prostora $\mathscr{R}^n$ i $\mathscr{R}^m$, Također samo jedna matrica, pri fiksnim bazama vektorskih prostora, definira linearni operator. O geometrijskoj interpretaciji problema izjednačenja geodetske mreže vidi u (Jokl 1984, Jandorek 1984, Teunissen 1985, Vaniček, Krakiwsky 1986).

Preslikavanje (1) možemo predočiti pomoću *linearnog sistema*

$$Ax = y, \tag{2}$$

gdje je

A — matrica linearnog operatora A s obzirom na baze vektorskih prostora $\mathscr{R}^n$ i $\mathscr{R}^m$,

x — vektor parametara modela,

y — vektor mjerenih veličina.

Vektorski prostor razapet stupcima matrice A (dim A = /m, n/ i m $\geq$ n) nazvat ćemo prostor stupaca ili *rang-prostor* matrice A i označiti $\mathscr{R}$ [A], a vektorski prostor razapet recima matrice A (ili stupcima matrice A^T) nazvat ćemo *prostor redaka* matrice A i označiti $\mathscr{R}$ [A^T]. Prostor $\mathscr{R}$ [A] definiran je kao funkcionalna interpretacija vektora mjerenih veličina. Da bi sistem bio rješiv, nameće se uvjet da se vektor mjerenih veličina y može interpretirati pomoću prostora $\mathscr{R}$ [A], odnosno da je

$$y \in \mathscr{R}\,[A]. \tag{3}$$

Za sistem koji zadovoljava uvjet (3) kažemo da je *konzistentan*, a to je temeljni uvjet rješivosti sistema.

Prostor $\mathscr{R}^n$ možemo rastaviti na potprostor $\mathscr{R}$ [A^T], u kojem će se nalaziti vektori x, za koje je zadovoljeno

$$Ax = y,$$

a u slučaju nepotpunog ranga prostora $\mathscr{R}^n$, na nul-potprostor $\mathscr{N}$ [A], koji sačinjavaju vektori x, za koje je zadovoljeno

$$Ax = 0.$$

Proizlazi da je

$$\mathscr{R}\,[A^T] \cap \mathscr{N}\,[A] = (0).$$

Odnosno, potprostori $\mathscr{N}$ [A] i $\mathscr{R}$ [A^T] su komplementarni potprostori prostora $\mathscr{R}^n$

$$\mathscr{R}^n = \mathscr{N}\,[A] \oplus \mathscr{R}\,[A^T]. \tag{4}$$

Potprostori $\mathscr{R}$ [A^T[i $\mathscr{N}$ [A] su međusobno ortogonalni, što ćemo označiti $\mathscr{R}$ [A^T]$^\perp$ = $\mathscr{N}$ [A]. U tom će slučaju svaki vektor iz $\mathscr{N}$ [A] biti okomit na svaki vektor iz $\mathscr{R}$ [A^T]. Ortogonalnost će biti zadovoljena ako su svi vektori $x_0 \in \mathscr{N}$ [A], za koje je zadovoljeno $Ax_0 = O$, ortogonalni na sve vektore $z \in$ $\in \mathscr{R}$ [A^T], koji zadovoljavaju sistem

$$A^T b = z.$$

Ortogonalnost vektora x_0 i z dokazuje

$$x_0^T z = x_0^T (A^T b) = (A x_0)^T b = 0.$$

Analogno, za vektorske prostore $\mathscr{R}[A]$ i $\mathscr{N}[A^T]$ vrijedi da su komplementarni potprostori vektorskog prostora mjerenih veličina $\mathscr{R}^m$

$$\mathscr{R}^m = \mathscr{R}[A] \oplus \mathscr{N}[A^T] \tag{5}$$

i da su međusobno ortogonalni, što ćemo označiti $\mathscr{R}[A]^{\perp} = \mathscr{N}[A^T]$.

Ako je matrica A dimenzija (m, n), bit će

$$\dim \mathscr{R}[A] = \operatorname{rang} A = r \tag{6a}$$

$$\dim \mathscr{N}[A^T] = n - r,$$

a budući da je rang A = rang A^T, bit će

$$\dim \mathscr{R}[A^T] = \operatorname{rang} A^T = r \tag{6b}$$

$$\dim \mathscr{N}[A] = m - r.$$

U slučaju regularnog sistema (dimenzije matrice su (n, n), a rang je n), operator će jednoznačno preslikavati vektore iz prostora parametara modela u prostor mjerenih veličina, a inverzni operator će jednoznačno preslikavati vektore iz prostora mjerenih veličina u prostor parametara modela. Dovoljan uvjet da regularan, konzistentan sistem ima jednoznačno rješenje po x jest postojanje inverznog operatora koji vrši jednoznačno preslikavanje. Da bi regularan linearni operator N imao jednoznačan inverzni operator, nužan i dovoljan uvjet jest

$$\operatorname{Ker} N = \operatorname{def} N = 0. \tag{7}$$

U singularnom sistemu ili kod pravokutnog oblika matrice A to neće biti slučaj. Prilikom rješavanja takvog sistema potprostori moraju zadovoljiti navedene uvjete, odnosno u slučaju generalizirane inverzije, prilikom zadavanja dodatnih uvjeta, moramo osigurati navedene odnose među potprostorima.

4. GENERALIZIRANA INVERZIJA

Generaliziranu inverziju (g-inverziju) shvatit ćemo slobodnije od Cayleyeve inverzije, koja definira jednoznačnu inverznu matricu N^{-1} regularne matrice N (n, n) i zadovoljava uvjete

$$NN^{-1} = N^{-1}N = I. \tag{8}$$

Pod g-inverzijom ćemo, prilikom rješavanja sistema, podrazumijevati svaku matricu B koja zadovoljava

$$x = By \tag{9}$$

za sve vektore y koji čine sistem konzistentnim. U slučaju g-inverzije matrica B mora zadovoljiti osnovni uvjet invertiranja

$$ABA = A. \tag{10}$$

U slučaju regularne inverzije vektorski prostor se preslikava u prostor istih dimenzija, a u slučaju singularnog sistema ili pravokutnog oblika matrice A u prostor manjih dimenzija, a ostatak prostora, dimenzija (n-r), tvori nul-prostor.

5. ISPITIVANJE SISTEMA

Ispitivanje egzistencije rješenja sistema (2) može se provesti na osnovi dimenzija vektorskih potprostora, odnosno ranga r i dimenzija matrice A (m, n).

Ako matrica A ima potpun rang redaka $r^{r} = m$, bit će

$$\dim \mathscr{R}\,[A] = \dim \mathscr{R}\,[A^T] = m,$$

Slijedi da je

$$\dim \mathscr{N}\,[A^T] = m - m = 0$$

$$\dim \mathscr{N}\,[A] = n - m.$$

Vidimo da je $\mathscr{N}\,[A^T] = (O)$, iz čega proizlazi $\mathscr{R}^m = \mathscr{R}\,[A]$, što osigurava rješivost sistema. U ovom slučaju će postojati *desna inverzija* matrice, A, tj. postojat će matrica B koja će zadovoljavati

$$AB = I. \tag{11}$$

Potprostor $\mathscr{N}\,[A]$ ne iščezava u slučaju desne inverzije i naziva se *desni nul-prostor*. Matrica B ne preslikava jednoznačno bazu potprostora $\mathscr{R}\,[A]$ na potprostor $\mathscr{R}\,[A^T]$ jer potprostor $\mathscr{R}\,[A^T]$ ne sadrži kompletnu bazu prostora $\mathscr{R}^n$. Potprostor [A] sadržatvat će n — r vektora.

U slučaju kada matrica A ima potpun rang stupaca $r_s = n$, bit će

$$\dim \mathscr{R}\,[A] = \dim \mathscr{R}\,[A^T] = n.$$

Slijedi da je

$$\dim \mathcal{N}\,[A^T] = m - n$$

$$\dim \mathcal{N}\,[A] = n - n = 0.$$

Vidimo da je $\mathcal{N}\,[A] = (O)$, iz čega proizlazi da je $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}\,[A^T]$. U ovom slučaju će postojati matrica B, koja će zadovoljavati uvjet *lijeve inverzije*

$$BA = I. \tag{12}$$

U slučaju lijeve inverzije potprostor $\mathcal{N}\,[A^T]$ ne iščezava i naziva se *lijevi nul-prostor.*

U ostalim slučajevima ($m \neq r \neq n$) analizu sistema i rješavanje sistema provest ćemo metodom dekompozicije na singularne vrijednosti.

6. DEKOMPOZICIJA MATRICE NA SINGULARNE VRIJEDNOSTI

Iako je engleski matematičar J. J. Sylvester već 1889. godine otkrio metodu dekompozicije na singularne vrijednosti (DSV), zbog opsežnog računanja ona se u većoj mjeri primjenjuje tek u novije vrijeme. DSV-metodu su obrađivali između ostalih Rao, Mitra (1971), Grafarend i dr. (1979), Teunissen (1985), Skelton (1988), Keilbasinski, Schwetlick (1988), Press i dr. (1988), Jäger (1988), Ninkov (1989).

Matricu A dimenzija (m, n) s rangom $A = r \leq \min\,(m, n)$ možemo rastaviti u oblik

$$A = USV^T. \tag{13}$$

Ortogonalna matrica V i po stupcima ortogonalna matrica u zadovoljavaju uvjete *ortonormalizacije*

$$U^TU = I \tag{14}$$

$$V^TV = I$$

i uvjete

$$A\,A^TU = U\,S\,S^T$$

$$A^TAV = VS^TS.$$

Matrica S ima kanonsku strukturu

$$S = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_r = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

Bit će $\lambda_i > 0$ za $i = 1, \ldots, r$ elemenata.

Primjenom DSV-metode na sistem (2) dobivamo

$$USV^T x = y \tag{15a}$$

ili rastavljanjem na blok-matrice

$$\underset{(m,n)}{\begin{bmatrix} \underset{(m,r)}{U_1} & \underset{(m,n-r)}{U_2} \end{bmatrix}} \; \underset{(n,n)}{\begin{bmatrix} \underset{(r,r)}{S_r} & \underset{(,n-r)}{0} \\ \underset{(n-r,r)}{0} & \underset{(n-r,n-r)}{0} \end{bmatrix}} \; \underset{(n,n)}{\begin{bmatrix} \underset{(r,n)}{V_1^T} \\ \underset{(n-r,n)}{V_2^T} \end{bmatrix}} \; \underset{(n,1)}{x} = \underset{(m,1)}{y}. \tag{15b}$$

Zbog izotropnih svojstava euklidskog prostora, s obzirom na geometriju, baze vektorskih potprostora bit će invarijantne na ortogonalne transformacije, a stupci blok-matrice U_1, U_2, V_1 i V_2 će razapinjati vektorske potprostore $\mathscr{R}[A]$, $\mathscr{N}[A^T]$, $\mathscr{R}[A^T]$ i $\mathscr{N}[A]$ i tvoriti njihove ortonormirane baze

$$\mathscr{R}^m = \mathscr{R}[A] \oplus \mathscr{N}[A^T] \rightarrow U = [U_1 \; U_2] \tag{16}$$

$$\mathscr{R}^n = \mathscr{R}[A^T] \oplus \mathscr{N}[A] \rightarrow V = [V_1 \; V_2].$$

Zbog ortogonalnosti potprostora bit će

$$\mathscr{R}[A] \perp N[A^T] \rightarrow U_1^T U_2 = 0$$

$$\mathscr{R}[A^T] \perp \mathscr{N}[A] \rightarrow V_2^T V_2 = 0,$$

a zbog ortonormalnosti baza vektorskih potprostora, odnosno stupaca blok-matrica, bit će

$$U_1^T U_1 = I, \qquad U_2^T U_2 = I,$$

$$V_1^T V_1 = I, \qquad V_2^T V_2 = I.$$

Stupci matrice V_2 razapinju nul-prostor $\mathscr{N}[A]$ dizajn-matrice (konfiguracijske matrice) A, te će biti zadovoljeno

$$A V_2 = 0$$

$$V_2^T x = 0.$$

Ako sistem (15) pomnožimo slijeva s U^T, dobit ćemo

$$SV^T x = U^T y,$$

a uvođenjem pomoćnih veličina

$$h = V^T x \quad \text{i} \quad b = U^T y$$

dobivamo

$$S\,h = b.$$

Ili razvijeno pisano

$$\begin{aligned} \lambda_1 h_1 \qquad\qquad &= b_1 \\ \lambda_2 h_2 \qquad &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \lambda_r h_r &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 &= b_n. \end{aligned}$$

Vektor x možemo rastaviti na dvije komponente

$$x = \overline{x} + x^0, \tag{17}$$

gdje je

$$\overline{x} = V\overline{h}, \quad \overline{h} = (h_1, \dots, h_r, 0, \dots, 0)^T, \quad h_j = b_j/\lambda_j \; (j = 1, \dots, r)$$

$$x^0 = Vh^0, \quad h^0 = (0, \dots, 0, h_{r+1}, \dots, h_n)^T, \quad h_j \text{ — proizvoljno}$$

$$(j = r + 1, \dots, n).$$

Općenito možemo skup rješenja sistema (2) po x predstaviti pomoću izraza

$$L\,(A, y) = \overline{x} + x^0 = \overline{x} + \mathcal{N}\,[A]. \tag{18}$$

Da bismo dobili jednoznačno rješenje, postavit ćemo dodatni uvjet

$$\min_x \, |x|^2, \tag{19}$$

čime ćemo postići da su pomaci slobodne mreže u koordinatnom sustavu minimalni. Više o problemu izbora norme vektora i metrike prostora vidi u (Mardešić 1979, Fritsch, Schaffrin 1982, Grantmacher 1986). Normu vektora x dobit ćemo kao

$$|x|^2 = |\bar{x}|^2 + |x^0|^2. \tag{20}$$

Vektor x imat će minimalnu normu kad je $x^0 = O$, odnosno kad je $x = \bar{x}$, a to će biti slučaj kad je vektor x ortogonalan na vektor x^0, odnosno kad je ortogonalan na $\mathcal{N}[A]$, a to je zadovoljeno uvjetima ortonormalizacije koje metoda DSV mora zadovoljiti. Izraz (15) možemo, s obzirom na vektor x i blok-matrice, rastaviti na dva dijela, na

$$U_1 S_r V_1^T \bar{x} = y \tag{21}$$

i na drugi dio, s obzirom na vektor x^0, koji neće imati utjecaja na rješenje sistema i za koji će biti $\|x^0\|^2 = O$.

Uvjeti ortonormalizacije baza vektorskih prostora pri primjeni DSV-metode definiraju rješenje s najmanjom normom.

Množenjem izraza (15) slijeva s U_1^T, S^+ i V_1 dobivamo vektor x

$$x = V_1 S^+ U_1^T y, \tag{22}$$

gdje je

$$S^+ = S_r^{-1}$$
$$S_r^{-1} = \mathrm{diag}\,(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_r). \tag{23}$$

S obzirom na DSV-metodu dobit ćemo za inverziju matrice A

$$A^+ = V_1 S^+ U_1^T, \tag{24}$$

odnosno za vektor x

$$x = A^+ y. \tag{25}$$

Izraz (25) definira preslikavanje

$$A^+ : y \to x,$$

koje predočuje ovisnost vektora x o vektoru y. Matrica A^+ je jednoznačno definirana, a zadovoljava izraze

$$\begin{array}{ll} AA^+A = A & A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^T = AA^+ & (A^+A)^T = A^+A \end{array} \tag{26}$$

i naziva se Moore-Penroseova inverzija ili kraće pseudoinverzija.

7. RJEŠENJE U SKLADU S TEORIJOM NAJMANJIH KVADRATA

Uvedemo li stohastiku problema izjednačenja pomoću Gauss-Markova modela, dobit ćemo

$$D(l) = \sigma_0^2 Q_{ll}, \qquad E(l) = Ax$$

$$l = Ax + v, \tag{27}$$

gdje je

$D(l)$ — disperzija slučajnog vektora mjerenih veličina l,
$E(l)$ — očekivanje slučajnog vektora mjerenih veličina l,
A — konfiguracijska ili dizajn-matrica,
x — vektor nepoznatih parametara modela,
Q_{ll} — matrica kofaktora mjerenih veličina,
σ_0^2 — varijanca mjerenja jedinice težine,
v — vektor parametara nekonzistentnosti.

Više o problemu stohastike modela vidi u (Grafarend, d'Hone 1978, Perović 1986, Lapaine 1989).

Sistem (27), zbog nekonzistentnosti, nema izravno rješenje, već ćemo do njega doći primjenom principa teorije najmanjih kvadrata. Pri primjeni metode najmanjih kvadrata (MNK) vektor x neće biti izravno rješenje sistema (2), ali će predstavljati najbolju procjenu u smislu MNK. Kada sistem (27) zadovoljava MNK (v. sl. 1), bit će

$$l = A\hat{x} + \hat{v}, \tag{28}$$

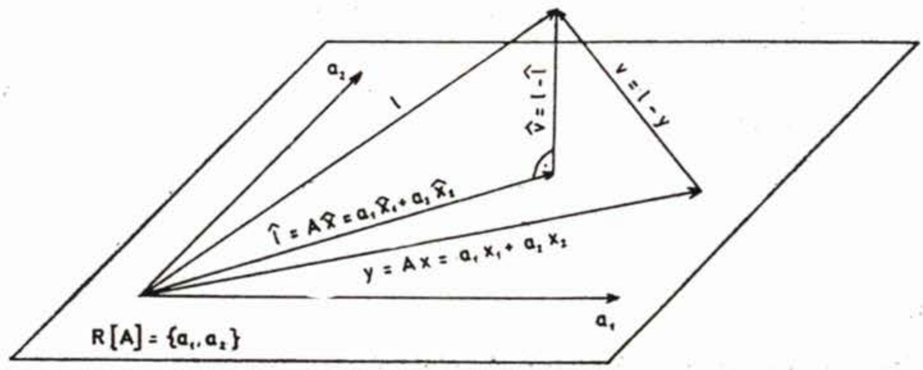
A — konfiguracijska ili dizajn-matrica,
$\hat{x}$ — vektor nepoznatih parametara s obzirom na MNK,
l — vektor mjerenih veličina,
$\hat{v}$ — vektor parametara nekonzistentnosti s obzirom na MNK.

Rješenje po teoriji najmanjih kvadrata svodi se na procjenu vektora i predstavljenog linearnom kombinacijom stupaca matrice A uz uvjet

$$\min_x |\hat{v}|^2 \quad \text{odnodno} \quad \min_x |l - A\hat{x}|^2, \tag{29a}$$

ili s obzirom na matricu Q_{ll} vektor x će minimizirati normu

$$\min_x |(l - A\hat{x})^T Q_{ll}^{-1} (l - A\hat{x})|^T \quad \text{ili kraće} \quad \min_x |l - A\hat{x}|^2_{Q^{-1}}. \tag{29b}$$



Slika 1. Grafički prikaz rješenja po MNK

Vektor $\hat{v}$ s obzirom na MNK i DSV dobit ćemo ako uvrstimo (13) i (22) u (28)

$$\hat{v} = l - U_1 S_r V_1^T V_1 S_r^{-1} U_1^T l = l - U_1 S_r S_r^{-1} U_1^T l = \\ = (I - U_1 U_1^T) l. \qquad (30)$$

Vektore $\hat{v}$, $\hat{l}$ i 1 možemo povezati izrazom

$$\hat{v} = l - \hat{l},$$

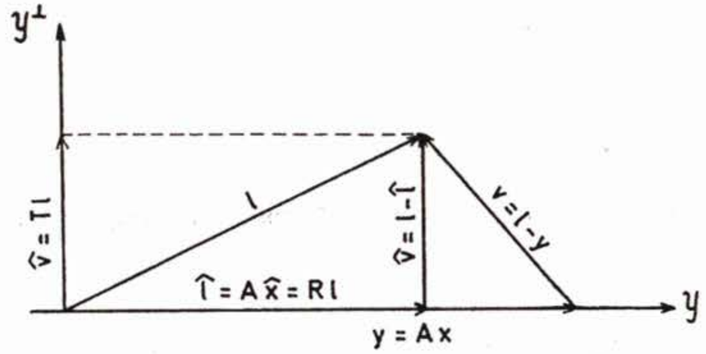
za koje je primjenom MNK zadovoljen uvjet ortogonalnosti $\hat{v} = (l - \hat{l}) \perp \perp \mathscr{R}[A]$, koji je ekvivalentan uvjetu $\hat{v} \in \mathscr{R}[A]^{\perp}$ ili matrično pisano

$$A^T\hat{v} = 0.$$

8. ORTOGONALNE PROJEKCIJE I PROJEKTORI

Vektor mjerenih veličina l, zbog pogrešaka mjerenja i nesavršenosti funkcionalnog modela, nije element prostora $\mathscr{R}[A]$, koji je definiran stupcima matrice A kao funkcionalna interpretacija mjerenih veličina. Da bi uvjet konzistentnosti bio zadovoljen, moramo proicirati vektor mjerenih veličina u prostor $\mathscr{R}[A]$, a da bismo zadovoljili osnovni uvjet MNK (29), moramo izvršiti ortogonalnu (najkraću) projekciju vektora l. Poopćenje metode MNK, u drugim vektorskim prostorima, često se promatra kao problem ortogonalnih projekcija. O problemu izjednačenja kao problemu ortogonalnosti u Hilbertovu prostoru vidi u (Meissl 1976, Eeg 1982, Reddy 1987, Young 1988).

Vektor l ortogonalno proiciramo u vektor $\hat{l}$ potprostora $\mathscr{Y} \subset \mathscr{R}^m$ (v. sl. 2) i pri tome će biti zadovoljeno



Slika 2. Ortogonalna projekcija

$$(l - \hat{l}) \perp \mathscr{Y}.$$

Postojat će operator za koji je definirana matrica H, koja će zadovoljavati

$$\hat{l} = \mathrm{Hl}. \tag{31}$$

Matrica H se naziva matrica *ortogonalnog projektora* na $\mathscr{Y}$ i zadovoljava

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{HH} = \mathrm{H}. \tag{32}$$

Ortogonalan projektor rastavlja vektorski prostor $\mathscr{R}^{\mathrm{m}}$ na dva ortogonalna komplementarna vektorska potprostora

$$\mathscr{R}^{\mathrm{m}} = \mathscr{Y} \oplus \mathscr{Y}^{\perp} \tag{33}$$

Matrica ortogonalnog projektora koji ortogonalno proicira vektor mjerenih veličina i čini sistem konzistentnim pri primjeni DSV i MNK dobiven je u izrazu (30)

$$\mathrm{R} = \mathrm{U}_1\, \mathrm{U}_1^{\mathrm{T}}. \tag{34}$$

Matrica R zadovoljava izraze (32).

Svaki vektor $l \in \mathscr{R}^{\mathrm{m}}$ može se prikazati u obliku $l = \hat{l} - \hat{\mathrm{v}}$, gdje je $\hat{l} \in \mathscr{Y}$ i $\hat{\mathrm{v}} \in \mathscr{Y}^{\perp}$. Za operator R kažemo da proicira vektor l u vektor $\hat{l}$ na prostor $\mathscr{Y}$ s obzirom na prostor $\mathscr{Y}^{\perp}$, tj.

$$\mathrm{R} : l \rightarrow \hat{l},$$

a za operator T, koji je definiran matricom T = I — R, kažemo da je ortogonalan projektor koji proicira vektor l u vektor

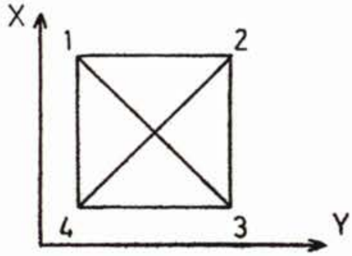
$$\hat{\mathrm{v}} = \mathrm{T}l \tag{35}$$

na $\mathscr{Y}^{\perp}$ s obzirom na $\mathscr{Y}$, tj.

$$T : l \rightarrow \hat{v}.$$

Vektori $\hat{v}$ i $\hat{l}$ su ortogonalni, tj. $\hat{l}^{T}\hat{v} = 0$.

DODATAK: Primjena DSV i MNK na slobodnu trilateracijsku mrežu.



	Y_0	X_0
1	100.030	200.020
2	200.070	200.040
3	200.040	100.050
4	100.000	100.000

Mjerene veličine

strana	d_{mj}	$l = d_{mj} - d_{koo}$	
1—2	99.980 m	−6.00	cm
1—4	100.000	−2.00	
1—3	141.410	0.28	
2—3	100.020	3.00	
2—4	141.430	−6.91	
3—1	141.400	−0.72	
3—4	100.010	−3.00	
4—1	100.030	1.00	
4—2	141.410 m	−8.91	cm

Konfiguracijska ili dizajn-matrica

$$A = \begin{bmatrix}
-.0002 & -1.0000 & .0002 & 1.0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\
1.0000 & .0003 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & -1.0000 & -.0003 \\
.7070 & -.7072 & .0000 & .0000 & -.7070 & .7072 & .0000 & .0000 \\
.0000 & .0000 & 1.0000 & .0003 & -1.0000 & -.0003 & .0000 & .0000 \\
.0000 & .0000 & .7070 & .7072 & .0000 & .0000 & -.7070 & -.7072 \\
.7070 & -.7072 & .0000 & .0000 & -.7070 & .7072 & .0000 & .0000 \\
.0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0005 & 1.0000 & -.0005 & -1.0000 \\
1.0000 & .0003 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & -1.0000 & -.0003 \\
.0000 & .0000 & .7070 & .7072 & .0000 & .0000 & -.7070 & -.7072
\end{bmatrix}$$

Stupci matrice A definiraju prostor parametara modela $\mathscr{R}^n$ ($n = 8$), koji se zbog def A = 3 (v. matricu S) dijeli na rang-prostor $\mathscr{R}$ [A] (dim $\mathscr{R}$ [A] = 5) i na nul-prostor $\mathscr{N}$ [A^T] (dim $\mathscr{N}$ [A^T] = def A = dim Ker A = 3).

Dekompozicijom konfiguracijske matrice $A = USV^T$ dobivamo

$$
\begin{array}{c}
U \\
\begin{array}{cc} U1 & U2 \\
\left[\begin{array}{rrrrr|rrr}
.2225 & -.0001 & -.3200 & -.1581 & .8007 & .1324 & .3888 & -.1145 \\
.3854 & .0000 & .5532 & -.0004 & .0004 & -.5223 & .4739 & .2072 \\
.3722 & -.5002 & -.1431 & .0001 & -.0001 & .2313 & -.2038 & .6890 \\
.2225 & .0000 & -.3193 & -.6144 & -.5379 & .1324 & .3887 & -.1145 \\
.3724 & .4998 & -.1432 & .0000 & -.0000 & -.0920 & -.3088 & -.0750 \\
.3722 & -.5002 & -.1431 & .0001 & -.0001 & -.4184 & -.3458 & -.5271 \\
.2227 & .0001 & -.3186 & .7730 & -.2637 & .1324 & .3888 & -.1145 \\
.3854 & .0000 & .5532 & -.0004 & .0004 & .6546 & -.0853 & -.3217 \\
.3724 & .4998 & -.1432 & .0000 & -.0000 & -.0953 & -.2412 & .2369
\end{array}\right]
\end{array} \\
\begin{array}{cc} S_r & 0 \end{array}
\end{array}
$$

$$S = \mathrm{diag}\,(2.5946 \;\; 2.0000 \;\; 1.8077 \;\; 1.4145 \;\; 1.4140 \,|\; 0 \;\; 0 \;\; 0).$$

Vidimo da je rang A = 5, a def A = 3. Kako se radi o izjednačenju slobodne trilateracijske mreže, defekti se javljaju zbog nedefiniranosti parametra rotacije i dvije translacije mreže u koordinatnom sistemu.

$$
\begin{array}{c}
V \\
\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\
\left[\begin{array}{rrrrr|rrr}
.4999 & -.3536 & .5001 & -.0005 & .0004 & -.0331 & -.6106 & .0328 \\
-.2886 & .3538 & .2892 & .1117 & -.5663 & -.5583 & -.1836 & -.1718 \\
.2887 & .3534 & -.2887 & -.4343 & -.3803 & .1056 & -.1794 & .5760 \\
.2888 & .3534 & -.2892 & -.1119 & .5662 & -.5583 & -.1836 & -.1720 \\
-.2885 & .3536 & .2885 & .4345 & .3084 & .1056 & -.1795 & .5758 \\
.2887 & -.3537 & -.2882 & .5467 & -.1865 & -.4196 & .2473 & .3709 \\
-.5001 & -.3534 & -.4999 & .0003 & -.0005 & -.0332 & -.6107 & .0327 \\
-.2889 & -.3535 & .2881 & -.5465 & .1865 & -.4196 & .2475 & .3712
\end{array}\right]
\end{array}
\end{array}
$$

Matrice U i V zadovoljavaju uvjete ortonormalnosti

$$V^T V = I \qquad V V^T = I$$

$$U^T U = I$$

i uvjete

$$A A^T U = U S S^T$$

$$A^T A V = V S^T S.$$

Stupci blok-matrica U_1, U_2, V_1, V_2 definiraju vektorske prostore $\mathscr{R}[A]$, $\mathscr{N}[A^T]$, $\mathscr{R}[A^T]$ i $\mathscr{N}[A]$ i zadovoljavaju uvjete ortonormalnosti

$$U_1^T U_1 = I \qquad V_2^T V_1 = I$$

$$U_1^T U_2 = I \qquad V_2^T V_2 = I$$

i ortogonalnosti

$$U_1^T U_2 = 0 \qquad V_1^T V_2 = 0$$

$$A V_2 = 0.$$

Invertiranjem dobivamo matricu $A^+ = U_1 \; S^+ V_1^T$, koja zadovoljava uvjete Moore-Penroseova inverzije

$$A A^+ A = A \qquad (A^+ A)^T = A^+ A$$

$$A^+ A A^+ = A^+ \qquad (A A^+)^T = A A^+.$$

Vektor nepoznatih parametara modela $\hat{x} = V_1 \; S^+ \; U_1 \; l = A^+ l$ je

$$\begin{array}{c} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{array} \begin{bmatrix} .88 \\ 2.10 \\ -.32 \\ -4.82 \\ -2.41 \\ -.60 \\ 1.84 \\ 3.31 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{cm} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{cm} \end{array}$$

Dobiveni parametri modela zadovoljavat će uvjete minimalnih translacija i rotacije mreže u koordinatnom sistemu

$$[dx] = 0, \qquad [dy] = 0, \qquad [Y_0 \, dx - X_0 \, dy] = 0$$

i ortogonalni su na nulti prostor $\mathcal{N}$ [A], tj.

$$V_2^T \hat{x} = 0.$$

Izjednačeni vektori parametara nekonzistentnosti i mjerenih veličina (prikraćenih mjerenja) su

$$\begin{array}{c} \text{strana} \\ \\ 1\text{—}2 \\ 1\text{—}4 \\ 1\text{—}3 \\ 2\text{—}3 \\ 2\text{—}4 \\ 3\text{—}1 \\ 3\text{—}4 \\ 4\text{—}1 \\ 4\text{—}2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \hat{v} = Tl = l - A\hat{x} \\ \\ \begin{bmatrix} .91 \\ -1.05 \\ -.14 \\ .91 \\ .36 \\ -1.14 \\ .91 \\ 1.95 \\ -1.64 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{cm} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{cm} \end{array} \quad \begin{array}{c} \hat{l} = Rl = l - \hat{v} \\ \\ \begin{bmatrix} -6.91 \\ -.96 \\ .42 \\ 2.09 \\ -7.27 \\ .42 \\ -3.91 \\ -.96 \\ -7.27 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{cm} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{cm} \end{array}$$

Primjenom MNK zadovoljen je uvjet ortogonalnosti vektora mjerenih veličina i parametara nekonzistentnosti

$$\hat{l}^{T}\,\hat{v} = 0.$$

Primjenom MNK izvršena je ortogonalna (najkraća) projekcija vektora mjerenih veličina l pomoću vektora $\hat{v}$, koji je okomit na prostor redaka matrice A, tj.

$$A^{T}\,\hat{v} = 0.$$

Matrica ortogonalnog projektora $R = U_1\,U_1^{T}$ je

$$R$$

$$\begin{bmatrix}
.8181 & -.0909 & .1285 & -.1818 & .1286 & .1285 & -.1819 & -.0909 & .1286 \\
-.0909 & .4546 & .0642 & -.0909 & .0643 & .0642 & -.0909 & .4546 & .0643 \\
.1285 & .0642 & .4092 & .1285 & -.0909 & .4092 & .1285 & .0642 & -.0909 \\
-.1818 & -.0909 & .1285 & .8182 & .1286 & .1285 & -.1818 & -.0909 & .1286 \\
.1286 & .0643 & -.0909 & .1286 & .4090 & -.0909 & .1286 & .0643 & .4090 \\
.1285 & .0642 & .4092 & .1285 & -.0909 & .4092 & .1285 & .0642 & -.0909 \\
.1819 & -.0909 & .1285 & -.1818 & .1286 & .1285 & .8181 & -.0909 & .1286 \\
-.0909 & .4546 & .0642 & -.0909 & .0643 & .0642 & -.0909 & .4546 & .0643 \\
.1286 & .0643 & -.0909 & .1286 & .4090 & -.0909 & .1286 & .0643 & .4090
\end{bmatrix}$$

Matrice R i T = I — R zadovoljavaju uvjete ortogonalne projekcije

$$R = R^{T} \qquad R\,R = R,$$

$$T = T^{T} \qquad T\,T = T.$$

Zadovoljene su kontrole izjednačenja

$$(l^{T}l + l A\hat{x}) - \hat{v}^{T}\hat{v} = 0,$$

$$d_{mj} + \hat{v} = \hat{d}_{koo},$$

gdje je

$\hat{d}_{koo}$ — dužine iz definitivnih koordinata,
d_{koo} — dužine iz približnih koordinata.

LITERATURA

Eeg, J. (1982): Continuous Methods in Least Squares Theory, Bollettino di geodesia e scienze affini, 1982, 4, 393—407.

Fritsch, D.; Schaffrin, B. (1982): The »Choice of Norm« Problem for the Free Net Adjustment with Orientation parameters, Bollettino di geodesia e scienze affini, 1982, 3, 259—282.

Grafarend, E.; d'Hone, A. (1978): Gewichtsschätzung in geodätischen Netzen, DGK, A—88, München 1978.
Grafarend, E.; Heister, H.; Kelm, R.; Kroppff, H.; Schaffrin, B. (1979): Optimierung geodätischer Meßoperationen, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1979.
Grantmacher, F. R. (1986): Matrizentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986.
Jäger, R. (1988): Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen kriterien und mechanische Analogien, DGK, C—342, München 1988.
Jahndorek, J. (1984): Methods for calculation and adjustment of dedicated networks applicable to block tacheometry, Technical papers, Series GK 3/84, 129—153, Prague 1984.
Jokl, L. (1984): New resoults in matematical modelling of geodetic networks, Technical papers, Series GK 3/84, 157—199, Prague 1984.
Kielbasinski, A.; Schmetlick, H. (1988): Numerische lineare Algebra, VEB Detscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
Kurepa, S. (1981): Funkcionalna analiza, Školska knjiga, Zagreb 1981.
Lapaine, M. (1989): Metoda najmanjih kvadrata u naše vrijeme, Geodetski list, 1989, 4—6, 119—132.
Mardešić, S. (1979): Matematička analiza 1, Školska knjiga, Zagreb 1979.
Meissl, P. (1976): Hilbert Spaces and Their Application to Geodetic Least Squares Problems, Bollettino di geodesia e scienze affini, 1976), 1, 6—80.
Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Naučna knjiga, Beograd 1989.
Perović, G. (1986): Singularna izravnanja, Naučna knjiga, Beograd 1986.
Press, H. W.; Flannerö, P. B.; Teukolsky, A. S.; Vetterling, T. W. (1988): Numerical Recipes, Cambridge University Press, Cambridge 1988.
Rao, C. R.; Mitra, S. K. (1971): Generalized Inverse of Matrices and its Applications, J. Wiley, New York 1971.
Reddy, J. N. (1987): Applied functional analysis and variational methods in engineering, McGraw-Hill, New York 1987.
Skelton, R. E. (1988): Dynamic systems control, J. Wileö, New York 1988.
Teunissen, P. (1985): Zero Order Design. U Grafarend, E. W.; Sanso, F. (1985): Optimization and Design of Geodetic Networks, Springer Verlag, Berlin 1985, 11—55.
Vaníček, P.; Krakiwsky, E. J. (1986): Geodesy: The concepts, North-Holland, Amsterdam 1986.
Young, N. (1988): An introduction to Hilbert space, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

A CONTRIBUTION TO THE INTERPRETATION OF THE ADJUSTMENT PROBLEM

The paper presents the relations of the deterministic character of the adjustment problem developed on linear algebra foundations in the finite dimensional vector spaces considering the four fundamental subspaces of the matrix theory. A case of the column rank defect of the configuration matrix has been solved by the singular value decomposition method (DSV). The adjustment using the DSV method has been done in regard to the least squares theory and, in the case of a generalized inverse, in regard to the Moor-Penrose inverse conditions. Orthogonal projections of the measurements vector were done by orthogonal projectors. A numerical example is given.

Primljeno: 1991-07-19