

POVRŠINA ELIPSOIDNOG TRAPEZA

Miljenko LAPAINE i Miroslava LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK: Površinu elipsoidnog trapeza moguće je izračunati primjenom egzaktne formule ili pomoću neke njene aproksimacije. Primjena približnih formula, koje nastaju primjenom razvoja u binomni red, zahtijeva prethodno određivanje broja članova reda koji će osigurati traženu točnost. Teorijska izvođenja ilustriraju se na računanjima površina listova topografskih karata za područje Jugoslavije.

1. EGZAKTNA FORMULA ZA RAČUNANJE POVRŠINE ELIPSOIDNOG TRAPEZA

Neka je dan rotacijski elipsoid s poluosima a i b . Označimo kao što je uobičajeno:

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2. \quad (1.1)$$

Površina P trapeza na elipsoidu, koji je omeđen paralelama Φ_1 i Φ_2 i meridianima λ_1 i λ_2 , može se egzaktno izračunati po formuli

$$P = \frac{b^2}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{\sin \Phi}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin \Phi}{1 - e \sin \Phi} \right) \Big|_{\Phi_2}^{\Phi_1}. \quad (1.2)$$

Naime, poznato je da se diferencijal dP površine na elipsoidu može napisati u obliku

$$dP = MN \cos \Phi d\Phi d\lambda, \quad (1.3)$$

gdje su

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^3}} \quad \text{i} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \quad (1.4)$$

* Mr. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb i mr. Miroslava Lapaine, Nikola Tesla, poduzeće za proizvodnju telekomunikacijskih sistema i uređaja, Krapinska 45, Zagreb.

polumjeri zakrivljenosti meridijana, odnosno prvog vertikala (vidi npr. Borčić 1955, Morozov 1979). Na osnovi izraza (1.1), (1.3) i (1.4) može se napisati

$$P = b^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{-2} \cos \Phi \, d\Phi \, d\lambda. \quad (1.5)$$

Odatle se odmah može naći

$$P = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{-2} \cos \Phi \, d\Phi. \quad (1.6)$$

Integral s desne strane ovog izraza pojednostavljuje se supstitucijom

$$\sin \psi = e \sin \Phi. \quad (1.7)$$

Zaista, lako se može izvesti da vrijedi

$$\int (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{-2} \cos \Phi \, d\Phi = \frac{1}{e} \int \cos^{-3} \psi \, d\psi. \quad (1.8)$$

Integral s desne strane može se naći u tablicama (npr. Bronštejn i Semendjajev 1975), te nakon odgovarajućeg uvrštavanja dolazimo do konačnog izraza (1.2). Ova egzaktna formula, kao i njezin izvod, mogu se naći u geodetskoj literaturi (Baeschlin 1948, Morozov 1979), ali uz napomenu da je računanje po toj formuli dosta složeno. Naravno, spomenuta napomena vrijedila je u doba računanja uz pomoć logaritamskih tablica, dok u današnje vrijeme ona ne stoji. Naime, osim četiri osnovne računске operacije, da bi se izračunala površina jednog elipsoidnog trapeza, potrebno je samo dva puta upotrijebiti trigonometrijsku funkciju sinus i izvršiti jedno logaritmiranje.

2. FORMULA ZA RAČUNANJE POVRŠINE ELIPSOIDNOG TRAPEZA NASTALA RAZVOJEM FUNKCIJE U BINOMNI RED

Razvijemo li funkciju

$$F(\Phi) = (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{-2} \quad (2.1)$$

u binomni red, dobit ćemo

$$\begin{aligned} F(\Phi) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) e^{2i} \sin^{2i} \Phi = \\ &= 1 + 2e^2 \sin^2 \Phi + 3e^4 \sin^4 \Phi + 4e^6 \sin^6 \Phi + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pomoću (2.2) možemo napisati

$$\begin{aligned} \int (1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{-2} \cos \Phi \, d\Phi &= \int F(\Phi) \cos \Phi \, d\Phi = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) e^{2i} \int \sin^{2i} \Phi \cos \Phi \, d\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2i+1} e^{2i} \sin^{2i+1} \Phi = \\ &= \sin \Phi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \Phi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \Phi + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 \Phi + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Prema tome, formula za računanje površine elipsoidnog trapeza može se napisati i u obliku beskonačnog reda potencija:

$$\begin{aligned} P = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) &\left(\sin \Phi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \Phi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \Phi + \right. \\ &\left. + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 \Phi + \dots \right) \Big|_{\Phi_1}^{\Phi_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

kao što je to npr. kod Borčića (1955), Morozova (1979), Haimova (1984). Prednost pri upotrebi ove formule pred formulom (1.2) jest u tome što osim četiri osnovne računске operacije, da bi se izračunala površina jednog elipsoidnog trapeza, potrebno je još samo dva puta primijeniti trigonometrijsku funkciju sinus, dok logaritmiranje otpada. Naravno, tu smo pretpostavili da se računanje odvija primjenom Hornerove sheme, tj.

$$\begin{aligned} P = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \Phi &\left(1 + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{2}{3} + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{3}{5} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{4}{7} + \dots \right) \right) \right) \right) \Big|_{\Phi_1}^{\Phi_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Manji nedostatak pri primjeni ove formule ogleda se u činjenici što se u praksi moramo zaustaviti nakon konačnog broja članova reda, a to znači da prije samog računanja moramo ustanoviti kolik broj članova reda će dati traženu točnost.

3. ANALIZA TOČNOSTI RAČUNANJA POVRŠINE ELIPSOIDNOG TRAPEZA

Računamo li površinu elipsoidnog trapeza po egzaktnoj formuli (1.2), točnost samog računanja ovisit će samo o mogućnostima upotrijebljenog računala, odnosno primijenjenog programskog jezika. Međutim, ako se površina računa primjenom formule (2.5), dolazi do dodatne pogreške zbog ograničenja na prvih nekoliko članova reda. Da bismo procijenili na taj način nastalu pogrešku, uočimo slijedeće formule:

$$P_1 = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \Phi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \Phi \right) \Big|_{\Phi_1}^{\Phi_2}, \quad (3.1)$$

$$P_2 = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \Phi \left(1 + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} e^2 \sin^2 \Phi \right) \right) \Big|_{\Phi_1}^{\Phi_2}, \quad (3.2)$$

$$P_3 = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \Phi \left(1 + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{2}{3} + e^2 \sin^2 \Phi \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{7} e^2 \sin^2 \Phi \right) \right) \right) \Big|_{\Phi_1}^{\Phi_2}. \quad (3.3)$$

Pogreška računanja nastala zbog uzimanja u obzir samo prvih nekoliko članova reda može se procijeniti na osnovi izraza:

$$\Delta P = P - P_1 \approx b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{i+1}{2i+1} e^{2i} (\sin^{2i+1} \Phi_2 - \sin^{2i+1} \Phi_1), \quad (3.4)$$

ili se može odrediti egzaktno

$$\Delta P = P - P_1, \quad (3.5)$$

budući da raspoložemo egzaktnom formulom (1.2) za površinu P.

Za ilustraciju provedenih teorijskih izvođenja izračunate su površine listova naših topografskih karata za mjerila 1:25000 (2. izdanje), 1:50000 i 1:100000 za područje čitave Jugoslavije, tj. za geografske širine od 41° do 47°. Osim toga, u tablicama 1—3 dane su i pogreške koje nastaju ako se umjesto egzaktnih formuli (1.2) za računanje površina primjenjuju približni izrazi (3.1)—(3.3).

4. »KRAĆI I JEDNOSTAVNIJI« ALGORITAM

Uvedimo radi kraćeg pisanja oznaku

$$G(\Phi) = \sin \Phi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \Phi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \Phi + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 \Phi + \dots \quad (4.1)$$

Izraz za računanje površine elipsoidnog trapeza (2.4) može se sada napisati u obliku

$$P = b^2 (\lambda_2 - \lambda_1) (G(\Phi_2) - G(\Phi_1)). \quad (4.2)$$

U Geodetskom listu br. 4—6 (1991) Štemberger je predložio slijedeći algoritam za računanje površine elipsoidnog trapeza:

$$P = R^2 (\lambda_2 - \lambda_1) (\sin \Phi'_2 - \sin \Phi'_1), \quad (4.3)$$

Tablica 1. Površine elipsoidnih trapeza za TK25 (2. izdanje) i pogreške pri računanju površina po formulama (3.1), (3.2) i (3.3); $\lambda_2 - \lambda_1 = \Phi_2 - \Phi_1 = 7'5$.

| $\Phi_1 (^{\circ})$ | P (ha) | $P - P_1$ | $P - P_2$ | $P - P_3$ |
|---------------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 41.000 | 14582.2969 | 0.3621 | 0.0014 | 0.0000 |
| 41.125 | 14554.9672 | 0.3651 | 0.0014 | 0.0000 |
| 41.250 | 14527.5670 | 0.3680 | 0.0014 | 0.0000 |
| 41.375 | 14500.0962 | 0.3710 | 0.0014 | 0.0000 |
| 41.500 | 14472.5551 | 0.3740 | 0.0015 | 0.0000 |
| 41.625 | 14444.9437 | 0.3769 | 0.0015 | 0.0000 |
| 41.750 | 14417.2621 | 0.3799 | 0.0015 | 0.0000 |
| 41.875 | 14389.5105 | 0.3829 | 0.0015 | 0.0000 |
| 42.000 | 14361.6890 | 0.3859 | 0.0015 | 0.0000 |
| 42.125 | 14333.7977 | 0.3888 | 0.0016 | 0.0000 |
| 42.250 | 14305.8368 | 0.3918 | 0.0016 | 0.0000 |
| 42.375 | 14277.8063 | 0.3948 | 0.0016 | 0.0000 |
| 42.500 | 14249.7063 | 0.3978 | 0.0016 | 0.0000 |
| 42.625 | 14221.5370 | 0.4008 | 0.0016 | 0.0000 |
| 42.750 | 14193.2986 | 0.4038 | 0.0017 | 0.0000 |
| 42.875 | 14164.9910 | 0.4068 | 0.0017 | 0.0000 |
| 43.000 | 14136.6145 | 0.4098 | 0.0017 | 0.0000 |
| 43.125 | 14108.1692 | 0.4128 | 0.0017 | 0.0000 |
| 43.250 | 14079.6552 | 0.4158 | 0.0017 | 0.0000 |
| 43.375 | 14051.0726 | 0.4188 | 0.0018 | 0.0000 |
| 43.500 | 14022.4216 | 0.4218 | 0.0018 | 0.0000 |
| 43.625 | 13993.7022 | 0.4248 | 0.0018 | 0.0000 |
| 43.750 | 13964.9146 | 0.4278 | 0.0018 | 0.0000 |
| 43.875 | 13936.0590 | 0.4308 | 0.0018 | 0.0000 |
| 44.000 | 13907.1353 | 0.4338 | 0.0019 | 0.0000 |
| 44.125 | 13878.1439 | 0.4368 | 0.0019 | 0.0000 |
| 44.250 | 13849.0847 | 0.4398 | 0.0019 | 0.0000 |
| 44.375 | 13819.9580 | 0.4428 | 0.0019 | 0.0000 |
| 44.500 | 13790.7638 | 0.4458 | 0.0020 | 0.0000 |
| 44.625 | 13761.5023 | 0.4488 | 0.0020 | 0.0000 |
| 44.750 | 13732.1735 | 0.4518 | 0.0020 | 0.0000 |
| 44.875 | 13702.7777 | 0.4548 | 0.0020 | 0.0000 |
| 45.000 | 13673.3150 | 0.4578 | 0.0020 | 0.0000 |
| 45.125 | 13643.7855 | 0.4608 | 0.0021 | 0.0000 |
| 45.250 | 13614.1892 | 0.4638 | 0.0021 | 0.0000 |
| 45.375 | 13584.5264 | 0.4668 | 0.0021 | 0.0000 |
| 45.500 | 13554.7972 | 0.4698 | 0.0021 | 0.0000 |
| 45.625 | 13525.0017 | 0.4727 | 0.0022 | 0.0000 |
| 45.750 | 13495.1401 | 0.4757 | 0.0022 | 0.0000 |
| 45.875 | 13465.2124 | 0.4787 | 0.0022 | 0.0000 |
| 46.000 | 13435.2187 | 0.4817 | 0.0022 | 0.0000 |
| 46.125 | 13405.1594 | 0.4846 | 0.0022 | 0.0000 |
| 46.250 | 13375.0344 | 0.4876 | 0.0023 | 0.0000 |
| 46.375 | 13344.8438 | 0.4906 | 0.0023 | 0.0000 |
| 46.500 | 13314.5879 | 0.4935 | 0.0023 | 0.0000 |
| 46.625 | 13284.2668 | 0.4965 | 0.0023 | 0.0000 |
| 46.750 | 13253.8806 | 0.4994 | 0.0024 | 0.0000 |
| 46.875 | 13223.4294 | 0.5023 | 0.0024 | 0.0000 |
| 47.000 | 13192.9133 | 0.5053 | 0.0024 | 0.0000 |

gdje je (uz u ovome radu uvedenu kraću oznaku (4.1)):

$$R = a \sqrt{(1 - e^2) G(\pi/2)}, \quad (4.4)$$

Tablica 2. Površine elipsoidnih trapeza za TK50 i pogreške pri računanju površina po formulama (3.1), (3.2) i (3.3); $\lambda_2 - \lambda_1 = \Phi_2 - \Phi_1 = 15'$

| Φ_1 (°) | P (ha) | P - P ₁ | P - P ₂ | P - P ₃ |
|--------------|------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 41.00 | 58274.5282 | 1.4545 | 0.0056 | 0.0000 |
| 41.25 | 58055.3264 | 1.4781 | 0.0057 | 0.0000 |
| 41.50 | 57834.9976 | 1.5018 | 0.0059 | 0.0000 |
| 41.75 | 57613.5454 | 1.5256 | 0.0060 | 0.0000 |
| 42.00 | 57390.9736 | 1.5494 | 0.0062 | 0.0000 |
| 42.25 | 57167.2861 | 1.5733 | 0.0064 | 0.0000 |
| 42.50 | 56942.4866 | 1.5972 | 0.0065 | 0.0000 |
| 42.75 | 56716.5792 | 1.6211 | 0.0067 | 0.0000 |
| 43.00 | 56489.5676 | 1.6451 | 0.0068 | 0.0000 |
| 43.25 | 56261.4557 | 1.6691 | 0.0070 | 0.0000 |
| 43.50 | 56032.2476 | 1.6931 | 0.0072 | 0.0000 |
| 43.75 | 54801.9472 | 1.7172 | 0.0073 | 0.0000 |
| 44.00 | 55570.5584 | 1.7412 | 0.0075 | 0.0000 |
| 44.25 | 55338.0854 | 1.7652 | 0.0077 | 0.0000 |
| 44.50 | 55104.5321 | 1.7892 | 0.0079 | 0.0000 |
| 44.75 | 54869.9026 | 1.8132 | 0.0080 | 0.0000 |
| 45.00 | 54634.2009 | 1.8372 | 0.0082 | 0.0000 |
| 45.25 | 54397.4314 | 1.8611 | 0.0084 | 0.0000 |
| 45.50 | 54159.5979 | 1.8850 | 0.0086 | 0.0000 |
| 45.75 | 53920.7048 | 1.9088 | 0.0088 | 0.0000 |
| 46.00 | 53680.7562 | 1.9326 | 0.0089 | 0.0000 |
| 46.25 | 53439.7564 | 1.9563 | 0.0091 | 0.0000 |
| 46.50 | 53197.7095 | 1.9799 | 0.0093 | 0.0000 |
| 46.75 | 52954.6199 | 2.0035 | 0.0095 | 0.0000 |
| 47.00 | 52710.4919 | 2.0269 | 0.0097 | 0.0000 |

Tablica 3. Površine elipsoidnih trapeza za TK100 i pogreške pri računanju površina po formulama (3.1), (3.2) i (3.3); $\lambda_2 - \lambda_1 = \Phi_2 - \Phi_1 = 30'$

| Φ_1 (°) | P (ha) | P - P ₁ | P - P ₂ | P - P ₃ |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 41.0 | 232659.7092 | 5.8652 | 0.0227 | 0.0001 |
| 41.5 | 230897.0859 | 6.0547 | 0.0239 | 0.0001 |
| 42.0 | 229116.5193 | 6.2453 | 0.0251 | 0.0001 |
| 42.5 | 227318.1316 | 6.4366 | 0.0264 | 0.0001 |
| 43.0 | 225502.0466 | 6.6285 | 0.0277 | 0.0001 |
| 43.5 | 223668.3897 | 6.8206 | 0.0290 | 0.0001 |
| 44.0 | 221817.2877 | 7.0129 | 0.0304 | 0.0001 |
| 44.5 | 219948.8693 | 7.2050 | 0.0318 | 0.0001 |
| 45.0 | 218063.2646 | 7.3967 | 0.0332 | 0.0001 |
| 45.5 | 216160.6055 | 7.5877 | 0.0346 | 0.0001 |
| 46.0 | 214241.0252 | 7.7778 | 0.0361 | 0.0002 |
| 46.5 | 212304.6589 | 7.9668 | 0.0376 | 0.0002 |
| 47.0 | 210351.6431 | 8.1544 | 0.0391 | 0.0002 |

$$\sin \Phi' = G(\Phi)/G(\pi/2). \quad (4.5)$$

Lako se vidi da se uvrštavanjem izraza (4.4) i (4.5) u (4.3) dolazi do poznate formule (4.2), tj. (2.4) Nadalje, računanje po Štembergerovu algoritmu je kompliciranije jer je sasvim očigledno da veličine R i $G(\pi/2)$ nije ni potrebno računati.

S druge strane, ako bismo umjesto izraza (4.5) upotrijebili formulu oblika (Štemberger 1991):

$$\Phi' = \Phi - \alpha \sin 2\Phi + \beta \sin 4\Phi - \gamma \sin 6\Phi + \dots, \quad (4.6)$$

tada je postupak još manje efikasan jer umjesto računanja dvaju sinusa, treba, za primjenu reda (4.6) uzimajući u obzir samo napisane članove, funkciju sinus primijeniti osam puta.

LITERATURA

- Baeschlin, C. F. (1948): Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich.
 Borčić, B. (1955): Matematička kartografija. Tehnička knjiga, Zagreb.
 Bronštejn, I. N. i Semendjajev, K. A. (1975): Matematički priručnik za inženjere i studente. Tehnička knjiga, Zagreb.
 Haimov, Z. S. (1984): Osnovy vysšej geodezii. Nedra, Moskva.
 Morozov, V. P. (1979): Kurs sferoidičeskoj geodezii. Nedra, Moskva.
 Štemberger, D. (1991): Jedan kraći algoritam za računanje površine elipsoidalnog trapeza. Geodetski list 4–6, 1991, 149–155.

AREA OF ELLIPSOIDAL TRAPEZIUM

The area of ellipsoidal trapezium can be calculated by using the exact formula or its approximation. The application of approximate formulas, which are derived by expanding into the binomial series, requires a preliminary determination of number of terms to insure the needed accuracy. The theoretical derivations are illustrated by computing the areas of topographic maps sheets of Yugoslav territory.

Primljeno: 1991-09-04