UDK 528.063(083.3):681.3
Stručni članak

TRANSFORMIRANJE LINEARNE KOMBINACIJE SINUSA VIŠESTRUKIH KUTOVA

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK. U radu se pokazuje kako se linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova mogu prikazati u oblicima koji su pogodniji za upotrebu primjenom računala. Nadalje, inverznim je postupkom moguće prikazati polinome po potencijama sinusa kao linearne kombinacije sinusa i kosinusa višestrukih kutova.

1. UVOD

U geodeziji i kartografiji često se primjenjuju aproksimacije raznih izraza pomoću linearnih kombinacija trigonometrijskih funkcija sinus ili kosinus višestrukih kutova. Takvi izrazi nastaju na prirodan način i razvojem funkcije u Fourierov red. Upotreba takvih linearnih kombinacija je nekada, u doba logaritamskih tablica, imala prednost pred drugačijim zapisima. Pri primjeni računala prednost se daje zapisu u obliku polinoma (modificiranog na poznat način, tako da se potenciranja zamijene množenjima). Na taj se način može izbjeći višestruko pozivanje trigonometrijskih funkcija i time ubrzava izvođenje, odnosno računanje.

Kako se u standardnim geodetskim priručnicima, kao što je npr. (Jordan/Eggert/Kneissl 1961), ne nalaze odgovarajući izrazi za transformaciju, to ćemo ih prikazati u ovome radu, s time što ćemo se ograničiti na linearne kombinacije funkcije sinus višestrukih kutova, dok je za funkciju kosinus pristup nešto jednostavniji (vidi Lapaine 1991).

U daljem tekstu oznaka $[x]$ značit će najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x. Npr. $[4.523] = 4$.

Nadalje, dogovorimo se da ako u nekoj matrici neki članovi nisu napisani, onda se podrazumijeva da su ti članovi nule.

Ako se u konačnoj formuli pojavljuje polinom, npr.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

* Mr. Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

tada se na osnovi prije rečenog podrazumijeva da ga treba doživjeti, odnosno programirati u obliku

$$f(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + xa_3)).$$

2. IZRAŽAVANJE SINUSA VIŠESTRUKOG ARGUMENTA POMOĆU POTENCIJA FUNKCIJE KOSINUS, ODNOSNO SINUS

U knjizi (Mitrinović 1975) izvedena je slijedeća formula

$$\sin n\alpha = \sin\alpha \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} \cos^{n-2k-1}\alpha. \; (n \geq 1). \quad (2.1)$$

Na osnovi ove formule možemo napisati

$$\sin i\alpha = \sin\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cos^{j-1}\alpha, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (2.2)$$

gdje smo označili

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^k \binom{i-k-1}{k} 2^{i-2k-1} & \text{za } i = 1, \ldots, n;\ k = 0, \ldots, \left[\frac{i-1}{2}\right];\ j = i-2k \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Relacija (2.2) može se napisati još preglednije u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \sin 2\alpha \\ \ldots \\ \sin n\alpha \end{bmatrix} = A_n \sin\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \ldots \\ \cos^{n-1}\alpha \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

gdje su elementi a_{ij} matrice A_n određeni prema (2.3). Tako npr. za $n = 10$ imamo

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & 4 & & & & & & & \\ 0 & -4 & 0 & 8 & & & & & & \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 16 & & & & & \\ 0 & 6 & 0 & -32 & 0 & 32 & & & & \\ -1 & 0 & 24 & 0 & -80 & 0 & 64 & & & \\ 0 & -8 & 0 & 80 & 0 & -192 & 0 & 128 & & \\ 1 & 0 & -40 & 0 & 240 & 0 & -448 & 0 & 256 & \\ 0 & 10 & 0 & -160 & 0 & 672 & 0 & -1024 & 0 & 512 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Iz gornjeg zapisa lako možemo pročitati odgovarajuću formulu za sinus bilo kojeg višekratnika (≤ 10) nekog kuta α, npr.

$$\sin 7\alpha = \sin \alpha \, (-1 + 24 \cos^2 \alpha - 80 \cos^4 \alpha + 64 \cos^6 \alpha),$$

dok se za višekratnike veće od 10 mogu lako odrediti potrebni koeficijenti prema (2.3).

U konkretnim slučajevima često se susreću samo sinusi neparnih ili samo parnih višekratnika kuta. Zato ćemo ih izdvojiti iz (2.4):

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \sin 3\alpha \\ \sin 5\alpha \\ \sin 7\alpha \\ \sin 9\alpha \end{bmatrix} = \sin \alpha \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 4 & & & \\ 1 & -12 & 16 & & \\ -1 & 24 & -80 & 64 & \\ 1 & -40 & 240 & -448 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2 \alpha \\ \cos^4 \alpha \\ \cos^6 \alpha \\ \cos^8 \alpha \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} \sin 2\alpha \\ \sin 4\alpha \\ \sin 6\alpha \\ \sin 8\alpha \\ \sin 10\alpha \end{bmatrix} = \sin \alpha \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -4 & 8 & & & \\ 6 & -32 & 32 & & \\ -8 & 80 & -192 & 128 & \\ 10 & -160 & 672 & -1024 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos^3 \alpha \\ \cos^5 \alpha \\ \cos^7 \alpha \\ \cos^9 \alpha \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

Sinuse neparnih višekratnika možemo izraziti samo pomoću potencija funkcije sinus. Naime, očito je da vrijedi relacija

$$\cos^{2i} \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^i, \tag{2.8}$$

za svaki i. Na primjer, za $i = 0, \ldots, 4$ možemo napisati

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2 \alpha \\ \cos^4 \alpha \\ \cos^6 \alpha \\ \cos^8 \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 3 & -1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sin^2 \alpha \\ \sin^4 \alpha \\ \sin^6 \alpha \\ \sin^8 \alpha \end{bmatrix},$$

što onda uvršteno u (2.6) daje

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \sin 3\alpha \\ \sin 5\alpha \\ \sin 7\alpha \\ \sin 9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 3 & -4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ 7 & -56 & 144 & -64 & \\ 9 & -120 & 392 & -576 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \sin^3 \alpha \\ \sin^5 \alpha \\ \sin^7 \alpha \\ \sin^9 \alpha \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Iz relacije (2.9) možemo npr. pročitati da je

$$\sin 7\alpha = 7 \sin \alpha - 56 \sin^3 \alpha + 144 \sin^5 \alpha - 64 \sin^7 \alpha.$$

U slučaju parnih višekratnika argumenta umjesto izraza (2.7) može se dobiti i nešto jednostavniji oblik ako zamislimo da umjesto α u (2.4) stoji 2α:

$$\begin{bmatrix} \sin 2\alpha \\ \sin 4\alpha \\ \sin 6\alpha \\ \sin 8\alpha \\ \sin 10\alpha \end{bmatrix} = \sin 2\alpha \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & \\ -1 & 0 & 4 & & \\ 0 & -4 & 0 & 8 & \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos^2 2\alpha \\ \cos^3 2\alpha \\ \cos^4 2\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

3. TRANSFORMIRANJE LINEARNE KOMBINACIJE SINUSA VIŠESTRUKOG ARGUMENTA

Neka je izdana funkcija f oblika

$$f(\alpha) = b_1 \sin \alpha + b_2 \sin 2\alpha + \ldots + b_n \sin n\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \sin i\alpha. \tag{3.1}$$

Primjenom relacije (2.2) lako se izvede da je za zadane b_i, $i = 1, \ldots, n$, linearnu kombinaciju (3.1) moguće prikazati u obliku

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sin \alpha \,(c_1 + c_2 \cos \alpha + \ldots + c_n \cos^{n-1} \alpha) = \\ &= \sin \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j \cos^{j-1} \alpha, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje su novi koeficijenti c_j određeni prema izrazu

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A_n^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Primjer 1:

Neka je

$$f(\alpha) = b_1 \sin \alpha + b_2 \sin 2\alpha + \ldots + b_{10} \sin 10\alpha.$$

Prema (3.1)—(3.3) i matrici (2.5) lako nalazimo da se može napisati

$$f(\alpha) = \sin \alpha (c_1 + c_2 \cos \alpha + \ldots + c_{10} \cos^9 \alpha),$$

gdje su koeficijenti $c_1, \ldots, c_{10}$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{10} \end{bmatrix} = A_{10}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

Primjer 2:

Neka je f funkcija samo neparnih višekratnika argumenta α oblika

$$f(\alpha) = b_1 \sin \alpha + b_3 \sin 3\alpha + \ldots + b_9 \sin 9\alpha.$$

Prema (3.1)—(3.3) i (2.6) lako nalazimo da se može napisati

$$f(\alpha) = \sin \alpha (c_1 + c_3 \cos^2 \alpha + \ldots + c_9 \cos^8 \alpha),$$

gdje su koeficijenti $c_1, c_3, \ldots, c_9$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_7 \\ c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 4 & & & \\ 1 & -12 & 16 & & \\ -1 & 24 & -80 & 64 & \\ 1 & -40 & 240 & -448 & 256 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \end{bmatrix}.$$

Međutim, zbog svojstva (2.8), imamo i jednostavniji oblik

$$f(\alpha) = c_1 \sin \alpha + c_3 \sin^3 \alpha + \ldots + c_9 \sin^9 \alpha,$$

gdje su koeficijenti $c_1\ c_3, \ldots, c_9$ sada određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_7 \\ c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 3 & -4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ 7 & -56 & 144 & -64 & \\ 9 & -120 & 392 & -576 & 256 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3:

Neka je f funkcija samo parnih višekratnika argumenta α oblika

$$f(\alpha) = b_2 \sin 2\alpha + b_4 \sin 4\alpha + \dots + b_{10} \sin 10\alpha.$$

Prema analogiji sa (3.1)—(3.3) i matrici (2.7) lako nalazimo

$$f(\alpha) = \sin \alpha \, (c_2 \cos \alpha + c_4 \cos^3 \alpha + \dots + c_{10} \cos^9 \alpha).$$

gdje su koeficijenti $c_2, c_4, \dots, c_{10}$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \\ c_6 \\ c_8 \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -4 & 8 & & & \\ 6 & -32 & 32 & & \\ -8 & 80 & -192 & 128 & \\ 10 & -160 & 672 & -1024 & 512 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

Ovaj se prikaz može dobiti i u jednostavnijem obliku ako umjesto (2.7) iskoristimo relaciju (2.10). Tada je

$$f(\alpha) = \sin 2\alpha \, (c_1 + c_2 \cos 2\alpha + c_3 \cos^2 2\alpha + \dots + c_5 \cos^4 2\alpha),$$

uz koeficijente $c_1, c_2, \dots, c_5$ određene prema

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & \\ -1 & 0 & 4 & & \\ 0 & -4 & 0 & 8 & \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 16 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

4. IZRAŽAVANJE POTENCIJA FUNKCIJE SINUS POMOĆU SINUSA, ODNOSNO KOSINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENTA

U uvodu smo naglasili da su sa stajališta efikasnosti primjene računala pogodniji polinomi trigonometrijskih funkcija od linearnih kombinacija trigonometrijskih funkcija višestrukih kutova. Međutim, kod nekih teorijskih izvođenja pojavljuje se potreba i za obrnutom transformacijom, koju ćemo sada razmotriti.

U poglavlju 2 imali smo relaciju

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \sin 3\alpha \\ \sin 5\alpha \\ \sin 7\alpha \\ \sin 9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 3 & -4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ 7 & -56 & 144 & -64 & \\ 9 & -120 & 392 & -576 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \sin^3 \alpha \\ \sin^5 \alpha \\ \sin^7 \alpha \\ \sin^9 \alpha \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Lako se vidi da je matrica koeficijenata u (2.9) regularna, pa se može napisati i obratna veza

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \sin^3\alpha \\ \sin^5\alpha \\ \sin^7\alpha \\ \sin^9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 3 & -4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ 7 & -56 & 144 & -64 & \\ 9 & -120 & 392 & -576 & 256 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \sin 3\alpha \\ \sin 5\alpha \\ \sin 7\alpha \\ \sin 9\alpha \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \sin^3\alpha \\ \sin^5\alpha \\ \sin^7\alpha \\ \sin^9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & & & \\ \frac{5}{8} & \frac{-5}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{35}{64} & \frac{-21}{64} & \frac{7}{64} & \frac{-1}{64} & \\ \frac{63}{128} & \frac{-21}{64} & \frac{9}{64} & \frac{-9}{256} & \frac{1}{256} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \sin 3\alpha \\ \sin 5\alpha \\ \sin 7\alpha \\ \sin 9\alpha \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

pomoću kojeg možemo neparne potencije od $\sin\alpha$ izraziti kao linearnu kombinaciju sinusa višestrukih argumenata. Osim opisanog postupka moguća je i primjena gotove formule (Prudnikov i dr. 1981):

$$\sin^{2n+1}\alpha = 2^{-2n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{k}\sin(2n-2k+1)\alpha.$$

Za dobivanje analogne relacije za parne potencije sinusa poslužit ćemo se izrazom iz (Lapaine 1991):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \cos 6\alpha \\ \cos 8\alpha \\ \cos 10\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ 1 & -8 & 8 & & & \\ -1 & 18 & -48 & 32 & & \\ 1 & -32 & 160 & -256 & 128 & \\ -1 & 50 & -400 & 1120 & -1280 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2\alpha \\ \cos^4\alpha \\ \cos^6\alpha \\ \cos^8\alpha \\ \cos^{10}\alpha \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

koji ćemo modificirati primjenom relacije (2.8), iz koje za $i = 1, \ldots, 5$ imamo Iz (4.2) i (4.3) konačno slijedi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2\alpha \\ \cos^4\alpha \\ \cos^6\alpha \\ \cos^8\alpha \\ \cos^{10}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 1 & -3 & 3 & -1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -5 & 10 & -5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sin^2\alpha \\ \sin^4\alpha \\ \sin^6\alpha \\ \sin^9\alpha \\ \sin^{10}\alpha \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Iz (4.2) i (4.3) konačno slijedi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sin^2\alpha \\ \sin^4\alpha \\ \sin^6\alpha \\ \sin^8\alpha \\ \sin^{10}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & & & & \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & & & \\ \frac{5}{16} & \frac{-15}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-1}{32} & & \\ \frac{35}{128} & \frac{-7}{16} & \frac{7}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{128} & \\ \frac{63}{256} & \frac{-105}{256} & \frac{15}{64} & \frac{-45}{512} & \frac{5}{256} & \frac{-1}{512} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \cos 6\alpha \\ \cos 8\alpha \\ \cos 10\alpha \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

I za parne potencije sinusa postoji gotova formula (Prudnikov i dr. 1981):

$$\sin^{2n}\alpha = 2^{1-2n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)\alpha + 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

5. TRANSFORMIRANJE POLINOMA PO POTENCIJAMA SINUSA U LINEARNU KOMBINACIJU KOSINUSA I SINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENATA

Neka je zadana funkcija f oblika

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \sin\alpha + \ldots + c_{10}\sin^{10}\alpha. \tag{5.1}$$

Grupiramo li posebno članove s parnim, a posebno s neparnim potencijama, dobijemo

$$f(\alpha) = (c_1 \sin\alpha + \ldots + c_9 \sin^9\alpha) + \\ + (c_0 + c_2\sin^2\alpha + \ldots + c_{10}\sin^{10}\alpha). \tag{5.2}$$

Primjenom relacije (4.1) i (4.4) lako se izvede da je za zadane c_i, $i = 0, \ldots, n$, polinom (5.2) moguće prikazati u obliku linearne kombinacije sinusa i kosinusa višestrukih argumenata:

$$f(\alpha) = b_0 + b_1\sin\alpha + b_2\cos 2\alpha + b_3\sin 3\alpha + \\ + b_4\cos 4\alpha + \ldots + b_9\sin 9\alpha + b_{10}\cos 10\alpha,$$

gdje su novi koeficijenti b, određeni prema

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & & & \\ \frac{5}{8} & \frac{-5}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{35}{64} & \frac{-21}{64} & \frac{7}{64} & \frac{-1}{64} & \\ \frac{63}{128} & \frac{-21}{64} & \frac{9}{64} & \frac{-9}{256} & \frac{1}{256} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_7 \\ c_9 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & & & & \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & & & \\ \frac{5}{16} & \frac{-15}{32} & \frac{3}{16} & \frac{-1}{32} & & \\ \frac{35}{128} & \frac{-7}{16} & \frac{7}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{128} & \\ \frac{63}{256} & \frac{-105}{256} & \frac{15}{64} & \frac{-45}{512} & \frac{5}{256} & \frac{-1}{512} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \\ c_6 \\ c_8 \\ c_{10} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Za polinome po potencijama sinusa stupnja većeg od deset mogu se odrediti njihovi koeficijenti na potpuno analogan način.

Primjer 4:

Neka je zadana funkcija

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \sin\alpha + c_2 \sin^2\alpha + c_3 \sin^3\alpha.$$

Prema (5.3) i (5.4) imamo

$$f(\alpha) = b_0 + b_1 \sin\alpha + b_2 \cos 2\alpha + b_3 \sin 3\alpha =$$

$$= \left(c_0 + \frac{1}{2} c_2\right) + \left(c_1 + \frac{3}{4} c_3\right) \sin\alpha - \frac{1}{2} c_2 \cos 2\alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha.$$

LITERATURA

Jordan/Eggert/Kneissl (1961): Handbuch der Vermessungskunde, Band I, Mathematische Grundlagen, Ausgleichungsrechnung und Rechenhilfsmittel. J. B Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1961.

Lapaine, M. (1991): Transformiranje linearne kombinacije kosinusa višestrukih argumenata. Geodetski list 7—9, 1991, 271—278.
Mitrinović, D. S. (1975): Uvod u specijalne funkcije. Građevinska knjiga, Beograd 1975.
Prudnikov, A. P., Ju. A. Bričkov, O. I. Maričev (1981): Integraly i rjady. Nauka, Moskva 1981.

TRANSFORMING THE LINEAR COMBINATION OF SINES OF MULTIPLE ANGLES

It is shown how a linear combination of sines of multiple angles can be represented in a form which is more suitable for computer computations. Furthermore, by using the inverse method it is possible to represent the polynomials in sines in the form of the linear combination of sines and cosines of multiple angles.

Primljeno: 1991-04-05