UDK 517.563
Stručni članak

TRANSFORMIRANJE LINEARNE KOMBINACIJE KOSINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENATA U POLINOM PO POTENCIJAMA KOSINUSA I OBRATNO

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK. U radu se pokazuje kako se mogu prikazati linearne kombinacije kosinusa višestrukih argumenata kao polinomi po potencijama kosinusa jednostrukih, odnosno dvostrukih argumenata. Nadalje, inverznim postupkom moguće je prikazati polinome po potencijama kosinusa kao linearne kombinacije kosinusa višestrukih argumenata.

1. UVOD

U geodeziji i kartografiji često se primjenjuju aproksimacije pomoću linearnih kombinacija trigonometrijskih funkcija sinus ili kosinus višestrukih kutova. Primjena takvih linearnih kombinacija je nekada, u doba logaritamskih tablica, imala prednost pred drugačijim oblicima zapisa. Pri primjeni kompjutora prednost se daje zapisu u obliku polinoma (modificiranog na poznati način, tako da se potenciranja zamijene množenjima). Na taj se način može izbjeći višestruko pozivanje trigonometrijskih funkcija i time ubrzava izvođenje, odnosno računanje.

Kako se u standardnim geodetskim priručnicima, kao npr. (Jordan/Eggert/Kneissl 1961) ne daju odgovarajući izrazi za transformaciju, to ćemo ih prikazati u ovom radu, s time da ćemo se ograničiti na funkciju kosinus, a na sličan način mogla bi se razmatrati i funkcija sinus.

U daljem tekstu oznaka [x] značit će najveći cijeli broj koji je manji ili jedna x. Npr. [4.523] = 4.

Nadalje, dogovorimo se da ako u nekoj matrici neki članovi nisu napisani, onda se podrazumijeva da su ti članovi nule.

Ako je konačna formula u obliku polinoma, npr.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

tada se na osnovi prije rečenog podrazumijeva da je treba doživjeti, odnosno programirati u obliku

$$f(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + xa_3)).$$

* Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26

2. IZRAŽAVANJE KOSINUSA VIŠESTRUKOG ARGUMENTA POMOĆU POTENCIJA FUNKCIJE KOSINUS

U knjizi (Mitrinović 1975) izvedena je slijedeća formula

$$\cos n\alpha = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} \cos^{n-2k} \alpha, \qquad (n \geq 1). \tag{2.1}$$

Na osnovi ove formule možemo napisati

$$\cos i\alpha = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \cos^j \alpha, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

gdje smo označili

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = 0,\ j = 0 \\ (-1)^k \dfrac{i}{i-k} \dbinom{i-k}{k} 2^{i-2k-1} & \text{za } i = 1, \ldots, n; k = 0, \ldots, \left[\dfrac{i}{2}\right]; \\ 0 & \text{inače.} \quad j = i - 2k + 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Relacija (2.2) može se napisati još preglednije u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos 2\alpha \\ \ldots \\ \cos n\alpha \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos^2\alpha \\ \ldots \\ \cos^n\alpha \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

gdje su elementi a_{ij} matrice $\mathbf{A}_n$ određeni prema (2.3). Tako npr. za $n = 10$ imamo

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&&&& \\ -1 & 0 & 2 &&&&&&&& \\ 0 & -3 & 0 & 4 &&&&&&& \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 &&&&&& \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 &&&&& \\ -1 & 0 & 18 & 0 & -48 & 0 & 32 &&&& \\ 0 & -7 & 0 & 56 & 0 & -112 & 0 & 64 &&& \\ 1 & 0 & -32 & 0 & 160 & 0 & -256 & 0 & 128 && \\ 0 & 9 & 0 & -120 & 0 & 432 & 0 & -576 & 0 & 256 & \\ -1 & 0 & 50 & 0 & -400 & 0 & 1120 & 0 & -1280 & 0 & 512 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Iz gornjeg zapisa lako možemo pročitati odgovarajuću formulu za kosinus bilo kojeg višekratnika (≤ 10) nekog kuta α, npr.

$$\cos 7\alpha = -7\cos\alpha + 56\cos^3\alpha - 112\cos^5\alpha + 64\cos^7\alpha,$$

dok se za višekratnike veće od 10 mogu lako odrediti potrebni koeficijenti prema (2.3).

U konkretnim slučajevima često se susreću samo kosinusi neparnih ili samo parnih višekratnika kuta. Zato ćemo ih izdvojiti iz (2.4):

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos 3\alpha \\ \cos 5\alpha \\ \cos 7\alpha \\ \cos 9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -3 & 4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ -7 & 56 & -112 & 64 & \\ 9 & -120 & 432 & -576 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos^3\alpha \\ \cos^5\alpha \\ \cos^7\alpha \\ \cos^9\alpha \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \cos 6\alpha \\ \cos 8\alpha \\ \cos 10\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ 1 & -8 & 8 & & & \\ -1 & 18 & -48 & 32 & & \\ 1 & -32 & 160 & -256 & 128 & \\ -1 & 50 & -400 & 1120 & -1280 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2\alpha \\ \cos^4\alpha \\ \cos^6\alpha \\ \cos^8\alpha \\ \cos^{10}\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

U slučaju parnih višekratnika argumenta umjesto izraza (2.7) može se dobiti i nešto jednostavniji oblik, ako zamislimo da umjesto α u (2.4) stoji 2α:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \cos 6\alpha \\ \cos 8\alpha \\ \cos 10\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 2 & & & \\ 0 & -3 & 0 & 4 & & \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos^2 2\alpha \\ \cos^3 2\alpha \\ \cos^4 2\alpha \\ \cos^5 2\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

3. TRANSFORMIRANJE LINEARNE KOMBINACIJE KOSINUSA VIŠESTRUKOG ARGUMENTA U POLINOM

Neka je zadana funkcija f oblika

$$f(\alpha) = b_0 + b_1\cos\alpha + b_2\cos 2\alpha + \ldots + b_n\cos n\alpha = \sum_{i=0}^{n} b_i\cos i\alpha. \tag{3.1}$$

Koristeći se relacijom (2.2), lako se izvede da je za zadane b_i, $i = 0, \ldots, n$, linearnu kombinaciju (3.1) moguće prikazati u obliku

$$f(\alpha) = c_0 + c_1\cos\alpha + \ldots + c_n\cos^n\alpha = \sum_{j=0}^{n} c_j\cos^j\alpha, \tag{3.2}$$

gdje su novi koeficijenti c_j određeni prema izrazu

$$c_j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} b_i, \qquad j = 0, \ldots, n, \tag{3.3}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = A_n^T \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Primjer 1.
Neka je

$$f(\alpha) = b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos 2\alpha + \ldots + b_{10} \cos 10\alpha.$$

Prema (3.1) — (3.3) i matrici (2.5) lako nalazimo da se može napisati

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + \quad + c_{10} \cos^{10} \alpha,$$

gdje su koeficijenti $c_0, \ldots, c_{10}$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{10} \end{bmatrix} = A_{10}^T \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.

Neka je f funkcija samo neparnih višekratnika argumenta α oblika

$$f(\alpha) = b_1 \cos \alpha + b_3 \cos 3\alpha + \ldots + b_9 \cos 9\alpha.$$

Prema (3.1) — (3.3) i (2.6) lako nalazimo da se može napisati

$$f(\alpha) = c_1 \cos \alpha + c_3 \cos^3 \alpha + \quad + c_9 \cos^9 \alpha,$$

gdje su koeficijenti $c_1, c_3, \ldots, c_9$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_7 \\ c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -3 & 4 & & & \\ 5 & -20 & 16 & & \\ -7 & 56 & -112 & 64 & \\ 9 & -120 & 432 & -576 & 256 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.

Neka je f funkcija samo parnih višekratnika argumenta α oblika

$$f(\alpha) = b_0 + b_2 \cos 2\alpha + b_4 \cos 4\alpha + \ldots + b_{10} \cos 10\alpha.$$

Prema analogiji sa (3.1) — (3.3) i matrici (2.7) lako nalazimo

$$f(\alpha) = c_0 + c_2 \cos^2 \alpha + c_4 \cos^4 \alpha + \ldots + c_{10} \cos^{10} \alpha,$$

gdje su koeficijenti $c_0, c_2, \ldots, c_{10}$ određeni prema

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \\ c_6 \\ c_8 \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ 1 & -8 & 8 & & & \\ -1 & 18 & -48 & 32 & & \\ 1 & -32 & 160 & -256 & 128 & \\ -1 & 50 & -400 & 1120 & -1280 & 512 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

Ovaj prikaz se može dobiti i u jednostavnijem obliku, ako umjesto (2.7) iskoristimo relaciju (2.8). Tada je

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \cos 2\alpha + c_2 \cos^2 2\alpha + \ldots + c_5 \cos^5 2\alpha,$$

uz koeficijente $c_0, \ldots, c_5$ određene prema

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 2 & & & \\ 0 & -3 & 0 & 4 & & \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix}.$$

4. IZRAŽAVANJE POTENCIJA FUNKCIJE KOSINUS POMOĆU KOSINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENTA

U uvodu smo naglasili da su sa stajališta efikasnosti primjene računala pogodniji polinomi trigonometrijskih funkcija od linearnih kombinacija trigonometrijskih funkcija višestrukih kutova. Međutim, u nekim teorijskim izvođenjima pojavljuje se potreba i za obrnutom transformacijom, koju ćemo sada razmotriti.

U poglavlju 2 imali smo relaciju

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos 2\alpha \\ \dots \\ \cos n\alpha \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos^2\alpha \\ \dots \\ \cos^n\alpha \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

gdje su elementi a_{ij} matrice A_n određeni prema (2.3). Lako se vidi da je matrica A_n regularna, pa se (2.4) može napisati i u obliku

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos^2\alpha \\ \dots \\ \cos^n\alpha \end{bmatrix} = A_n^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \cos 2\alpha \\ \dots \\ \cos n\alpha \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

pomoću kojeg možemo svaku potenciju $\cos^i\alpha$, $i = 1, \dots, n$, izraziti kao linearnu kombinaciju kosinusa višestrukih argumenata nakon što odredimo matricu A_n^{-1}. Npr. za $n = 10$, imamo

$$A_{10}^{-1} = \begin{bmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
\frac{3}{8} & 0 & \frac{4}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\
0 & \frac{10}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\
\frac{10}{32} & 0 & \frac{15}{32} & 0 & \frac{6}{32} & 0 & \frac{1}{32} \\
0 & \frac{35}{64} & 0 & \frac{21}{64} & 0 & \frac{7}{64} & 0 & \frac{1}{64} \\
\frac{35}{128} & 0 & \frac{56}{128} & 0 & \frac{28}{128} & 0 & \frac{8}{128} & 0 & \frac{1}{128} \\
0 & \frac{126}{256} & 0 & \frac{84}{256} & 0 & \frac{36}{256} & 0 & \frac{9}{256} & 0 & \frac{1}{256} \\
\frac{126}{512} & 0 & \frac{210}{512} & 0 & \frac{120}{512} & 0 & \frac{45}{512} & 0 & \frac{10}{512} & 0 & \frac{1}{512}
\end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

pa možemo lako pročitati da je npr.

$$\cos^7 \alpha = \frac{35}{64} \cos \alpha + \frac{21}{64} \cos 3\alpha + \frac{7}{64} \cos 5\alpha + \frac{1}{64} \cos 7\alpha.$$

Umjesto relacije (4.1), može se primijeniti i formula

$$\cos^n \alpha = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \cos (n-2k) \alpha, \tag{4.3}$$

koja se u malo drugačijim oblicima može naći u (Jordan/Eggert/Kneissl 1961, Mitrinović 1975, Prudnikov i dr. 1981).

5. TRANSFORMIRANJE POLINOMA PO POTENCIJAMA KOSINUSA U LINEARNU KOMBINACIJU KOSINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENATA

Neka je zadana funkcija f oblika

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + \quad + c_n \cos^n \alpha = \sum_{j=0}^{n} c_j \cos^j \alpha. \tag{5.1}$$

Primjenom relacije (4.1) lako se izvede da je za zadane c_i, $i = 1, \ldots, n$, polinom (5.1) moguće prikazati u obliku linearne kombinacije kosinusa višestrukih argumenata:

$$f(\alpha) = b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos 2\alpha + \ldots + b_n \cos n \alpha = \sum_{i=0}^{n} b_i \cos i \alpha, \tag{5.2}$$

gdje su novi koeficijenti b_i određeni prema

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = (A_n^{-1})^T \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Primjer 4.

Neka je zadana funkcija

$$f(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos^2 \alpha + c_3 \cos^3 \alpha.$$

Prema relaciji (5.3) i izrazu (4.2) imamo

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$f(\alpha) = b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos 2\alpha + b_3 \cos 3\alpha =$$
$$= \left(c_0 + \frac{1}{2} c_2\right) + \left(c_1 + \frac{3}{4} c_3\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} c_2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 3\alpha.$$

LITERATURA

Jordan/Eggert/Kneissl (1961): Handbuch der Vermessungskunde, Band I, Mathematische Grundlagen, Ausgleichungsrechnung und Rechenhilfsmittel, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1961.

Mitrinović, D. S. (1975) Uvod u specijalne funkcije. Građevinska knjiga, Beograd 1975.

Prudnikov, A. P., Ju. A. Bričkov, O. I. Maričev (1981): Integrali i rjadi, Nauka, Moskva 1981.

TRANSFORMATION OF THE LINEAR COMBINATION OF COSINES OF MULTIPLE ANGLES INTO THE POLYNOMIAL IN COSINES AND VICE VERSA

It is shown how a linear combination of cosines of multiple angles can be represented as a polynomial in cosines of a single or double angle. Furthermore, by using the inverse methods it is posible to represent the polynomials in cosines in the form of the linear combination of cosines of multiple angles.

Primljeno: 1991-04-05