UDK 528.14
Originalni znanstveni članak

IZRAVNANJE PO METODI FIKTIVNIH MERENJA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

SAŽETAK: U cilju realizacije tzv. kvadratnog ocenjivanja, na osnovu teorijskog razmatranja i pozivajući se na mogućnost da se stvarna jednačina popravaka zameni fiktivnom, u radu (Geod. list 1987, 7—9, 243—253) predložen je nov način određivanja težina (kvadratno merenih dužina). Međutim, novopredložena matrica težina kao i vektor popravaka kvadratno merenih dužina predstavljaju na proizvoljnostima zasnovane približne vrednosti. Novopredloženi vektor popravaka i matrica težina kvadratno merenih dužina mogu se korektnije, sem izravnanjem po metodi posrednih merenja, obuhvatiti i racionalnijim postupkom: izravnanjem po metodi fiktivnih merenja, čiji osnovi se izlažu u ovom radu.

U praksi se često ukazuje potreba da se ostvare takva višekratna (tzv. ponovljena) merenja, koja kao neposredna merenja nemaju, isključivo, za cilj određivanje jedne nepoznate nego koja kao posredna merenja mogu da posluže za određivanje drugih veličina, ili da ostvareni mereni rezultati sa drugim merenim rezultatima zajedno zadovolje jedan, odnosno više uslova. Tada se može postupiti tako da se za svako pojedinačno merenje uspostavi jedna jednačina popravaka, odnosno, imajući u vidu da svako ponovljeno merenje predstavlja jedno suvišno merenje, da se formira jedna uslovna jednačina. Ali može se postupiti i tako da se za veličinu koja podleže višestrukom merenju izravnanjem po metodi direktnih merenja odredi najverovatnija vrednost (obrazuje prosta ili otežinjena aritmetička sredina), odredi njena težina, dok se u inicijalne podatke zadatka koji se rešava izravnanjem, umesto svih merenih rezultata, unosi izravnanjem određena združena merena vrednost, uzimanjem u obzir utvrđene težine združene merene vrednosti.

Ako se pri izravnanju po metodi posrednih merenja u jednačinama popravaka povećava broj merenih veličina, povećava se i broj normalnih jednačina, a time znatno uvećava i celokupan posao matematičke obrade podataka. Rešavanje zadataka izravnanjem po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim veličinama, takođe, uvećava obim rada i uzrokuje dodatni posao u procesu obrade podataka. U takvim slučajevima izravnanje može biti efikasnije i ekonomičnije ako se mereni rezultati međusobno povezanih veličina *sažmu u jedno združeno merenje, ustanovi težina takvog merenja, a u izravnanje unese*

* Prof. dr. Ivan Molnar, Fakultet tehničkih nauka, Institut za industrijsku gradnju, 21000 Novi Sad, Veljka Vlahovića 3.

samo združeni mereni rezultat, naravno, uzimanjem u obzir utvrđene težine združenog merenog rezultata.

Sve one veličine proistekle iz merenja koje se uspostavljaju kao prosta ili otežinjena aritmetička sredina više merenih rezultata, ili se na osnovu jednog ili više merenih rezultata formiraju po nekoj funkciji (zavisnosti, formuli), *nazivaju se fiktivnim (izvedenim) merenim rezultatima.*

Tako je npr. jednostruko merenje neke dužine stvarno merenje, ali ako se dužina izmeri više puta, samo se pojedinačna merenja mogu smatrati stvarnim, dok se prosta ili otežinjena aritmetička sredina višestruko merene dužine — ukoliko njeno određivanje nije bio krajnji cilj izravnanja, nego se u nekom drugom izravnanju uzima kao mereni rezultat — smatra fiktivnom vrednošću. Fiktivno mereni rezultat je npr. visinska razlika određena trigonometrijskim merenjem visina, ako se unosi u neko izravnanje kao veličina koja se određuje, jer se neposredno meri zenitno odstojanje ili visinski ugao, dok se na osnovu merenog rezultata visinska razlika računa po funkciji.

Stvaranje fiktivno merenih rezultata uvek *ima za cilj da se računanja pojednostave,* a time i značajnije redukuju poslovi obrade podataka merenja, tj. da se poveća ekonomičnost. Celishodnost računanja sa fiktivno merenim rezultatima najčešće se ogleda samo u tome što je potreban, u odnosu na postupak kojim se u izravnanje ponaosob uvode svi mereni rezultati, manji broj jednačina popravaka (ili uslovnih jednačina), tj. normalnih jednačina. Međutim, presudan razlog za uvođenje fiktivno merenih rezultata često je okolnost — mada se i tada smanjuje broj jednačina u postupku izravnanja — da je zametna veza između stvarno merenih rezultata i nepoznatih jednostavnija i prepoznatljivija za fiktivna merenja, što rezultira efikasnijim i preglednijim načinom rešavanja nekih zadataka.

Prvo je pravilo za formiranje fiktivno merenih rezultata da neki stvarno mereni rezultat može samo jedan jedini put sudelovati u stvaranju fiktivno merenog rezultata. Ako se, međutim, stvarno i fiktivno mereni rezultati mešovito primenjuju u izravnanju, tada se u prvobitnom obliku primenjen stvarno meren rezultat ne sme uključiti u stvaranje fiktivno merenog rezultata. (Od pravila postoje retki izuzeci; odnose se na slučajeve kada se, unošenjem istovetnog stvarno merenog rezultata (ili više takvih stvarno merenih rezultata) u više fiktivno merenih rezultata, obrazuju međusobno nezavisni fiktivno mereni rezultati, tzv. *slobodne funkcije.* U takve veličine ubrajaju se izravnanjem iz *Schreiberovom metodom merenja uglova* izvedene vrednosti pravaca.)

Drugo je važno pravilo da se težine fiktivno merenih rezultata, izvedene na osnovu težina stvarno merenih rezultata, određuju primenom zakona rasprostiranja grešaka. Fiktivno mereni rezultati mogu se primenjivati samo sa tom težinom.

Međutim, *sa stanovišta ocene tačnosti merenih i izravnatih veličina, fiktivno mereni rezultati svrstavaju se u dve glavne grupe.* Prvu glavnu grupu čine oni fiktivno mereni rezultati obrazovani na osnovu stvarno merenih rezultata koji se *dobivaju višestrukim merenjem jedne te iste veličine, formirajući za nju prostu ili otežinjenu aritmetičku sredinu.* Izravnanje sa ovakvim fiktivno merenim rezultatima daje one vrednosti nepoznatih ako i u slučaju da se u izravnanje ponaosob uključuju svi stvarno mereni rezultati. Međutim, *računanja srednjih grešaka (standarda)* — imajući u vidu da se standardi računati pomoću stvarno i fiktivno merenih rezultata u principu međusobno razlikuju — *treba ostvarivati posredstvom prvobitno merenih rezultata.*

Drugu glavnu grupu sačinjavaju oni fiktivno mereni rezultati koji *nastaju po nekoj funkciji, na osnovu jednog merenog rezultata ili iz više stvarno merenih rezultata* međusobno različitih veličina. Srednje greške u ovoj grupi računaju se jednoznačno, tj. *za srednje greške dobijaju se iste vrednosti, bilo da se određivanja ostvaruju posredstvom popravaka i težina stvarno merenih rezultata, bilo pomoću popravaka i težina fiktivno merenih rezultata.* U prvom slučaju broj suvišnih merenja (stepeni slobode) utvrđuje se iz stvarno merenih rezultata, a u drugom na osnovu fiktivno merenih rezultata. Međutim, broj suvišnih merenja u oba slučaja je identičan, jer ako je n broj stvarno merenih rezultata, a φ na osnovu njih obrazovani broj fiktivno merenih rezultata, tada je izravnanjem pometodi posrednih merenja — ako se određivanja ostvaruju posredstvom stvarno merenih rezultata — pored r prvobitno nepoznatih, potrebno dodatno odrediti još i broj (nepoznatih)

$$q = n - \varphi \tag{1}$$

popravaka merenja. U tom slučaju broj suvišnih merenja iznosi

$$n_f = n - (r + q). \tag{2}$$

Ako se izravnanja ostvaruju pomoću fiktivno merenih rezultata, onda je broj suvišnih merenja

$$n_f = \varphi - r = n - q - r = n - (r + q). \tag{3}$$

Nakon što je egalitet broja suvišnih merenja raspravljen, potrebno je izvesti dokaz o jednakosti suma kvadrata popravaka

$$\underset{(1,\varphi)}{V^T}\ \underset{(\varphi,\varphi)}{P}\ \underset{(\varphi,1)}{V} = \underset{(1,n)}{v^T}\ \underset{(n,n)}{p}\ \underset{(n,1)}{v}, \tag{4}$$

u kojoj V i P označavaju vektor popravaka odnosno matricu težina fiktivno merenih rezultata. Pre svega, potrebno je pokazati kako se popravke fiktivno merenih rezultata rastaviti na popravke stvarno merenih rezultata.

Uopšte uzev, može se u matričnom obliku pisati

$$\underset{(\varphi,1)}{V} = \underset{(\varphi,n)}{Q^T}\ \underset{(n,1)}{v}, \tag{5}$$

gdje je v vektor popravaka stvarno merenih rezultata koji sudjeluju u formistvarno merenih rezultata, nastala linearizacijom funkcije fiktivno merenih rezultata, tj.

$$V^T = ||V_1\, V_2 \ldots V_\varphi|| \qquad v^T = ||v_1\, v_2 \ldots v_n||$$

$$Q = \left\| \begin{array}{c} \alpha_1\ \beta_1\ \ldots\ \varphi_1 \\ \alpha_2\ \beta_2\ \ldots\ \varphi_2 \\ \hline \alpha_n\ \beta_n\ \ldots\ \varphi_n \end{array} \right\|$$

Na osnovu matrice koeficijenata, vektora slobodnih članova kao i matrice težina stvarno merenih rezultata jednačina (5), koje se smatraju *uslovnim jednačinama,* obrazuju se normalne jednačine

$$\underset{(\varphi,\varphi)}{(Q^T p^{-1} Q)} \underset{(\varphi,1)}{k} - \underset{(\varphi,1)}{V} = \underset{(\varphi,1)}{0}. \tag{6}$$

Rešenjem normalnih jednačina određuje se vektor korelata

$$\underset{(\varphi,1)}{k} = \underset{(\varphi,\varphi)}{(Q^T p^{-1} Q)^{-1}} \underset{(\varphi,1)}{V}. \tag{7}$$

Na osnovu jednačina (5) može se utvrditi matrica težina fiktivno merenih rezultata. Naime, saobrazno rasprostiranju grešaka dobija se da je

$$\underset{(\varphi,\varphi)}{P} = \underset{(\varphi,\varphi)}{(Q^T p^{-1} Q)^{-1}}, \tag{8}$$

odakle proizlazi da se vektor korelata (7) može napisati i u drugom obliku

$$\underset{(\varphi,1)}{k} = \underset{(\varphi,\varphi)}{P} \underset{(\varphi,1)}{V}. \tag{9}$$

Shodno tome, određuje se *vektor popravaka stvarno merenih rezultata*

$$\underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{p^{-1}} \underset{(n,\varphi)}{Q} \underset{(\varphi,\varphi)}{P} \underset{(\varphi,1)}{V}. \tag{10}$$

Imajući u vidu jednačine (8), dobija se da je suma kvadrata popravaka stvarno merenih rezultata jednaka sumi kvadrata popravaka fiktivno merenih rezultata

$$v^T p v = V^T (Q^T p^{-1} Q)^{-1} Q^T p^{-1} p p^{-1} Q (Q^T p^{-1} Q)^{-1} V = V^T P V,$$

što je i trebalo dokazati.

Autor rada (6) nastoji da, uvođenjem popravaka kvadratno merenih dužina, razreši problematiku određivanja parametara uticaja grešaka η, λ i λ_0 u oblasti regresione analize. U tom cilju obradu podataka merenih dužina realizuje neobičnom programskom orijentacijom, i to tako što:

— vektor popravaka linearno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,r)}{A} \underset{(r,1)}{x} + \underset{(n,1)}{f} \ldots \underset{(n,n)}{p} \tag{A}$$

nije potrebno računati izravnanjem po metodi posrednih merenja pri određivanju popravaka kvadratno merenih dužina (nije potrebno vršiti nikakvu linearizaciju),

— vektor popravaka kvadratno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{V_k} = \underset{(n,r)}{B} \underset{(r,1)}{x} + \underset{(n,1)}{F_k} = \underset{(n,n)}{(s_0 + s)} \underset{(n,1)}{v} \ldots \underset{(n,n)}{P_k} \tag{B_0}$$

određuje se neposredno izravnanjem po metodi posrednih merenja kada se uzimaju kvadratno merene dužine (novopredloženi modalitet izravnanja, kao što se vidi, ostvaruje se tako što se vektor popravaka (A) sa leve strane množi dijagonalnom matricom $(s_0 + s)$).

Matrica težina P_k određuje se primenom zakona rasprostiranja grešaka na vektor popravaka (B_0)

$$\underset{(n,n)}{P_k} = \{\underset{(n,n)}{(s_0 + s)}\ \underset{(n,n)}{p^{-1}}\ \underset{(n,n)}{(s_0 + s)}\}^{-1} = \underset{(n,n)}{(s_0 + s)^{-1}}\ \underset{(n,n)}{p}\ \underset{(n,n)}{(s_0 + s)^{-1}}. \qquad (C_0)$$

Kako je, sada, vektor popravaka linearno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{(s_0 + s)^{-1}}\ \underset{(n,1)}{V_k}, \qquad (D_0)$$

to se dokazuje da je

$$v^T p v = V_k^T (s_0 + s)^{-1} p (s_0 + s)^{-1} V_k = V_k^T P_k V_k.$$

U nastavku, o nedostacima izravnanja po metodi posrednih merenja kada se umesto linearnih uzimaju kvadratno merene dužine, tj. o manama novopredloženog vektora popravaka i matrice težina kvadratno merenih dužina. Najpre, ukazivanje na jedan previd. Naime, umesto navodne dijagonalne matrice linearno merenih dužina $S = < S_1 S_2 \ldots S_n >$ (jednačina (14) u radu (Vračarić 1990), faktički se radi o vektoru linearno merenih dužina $s^T = \| s_1 s_2 \ldots s_n \|$. Saobrazno tome, umesto matričnih, obrazuju se vektorske funkcije veza

$$\underset{(n,1)}{s} + \underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,1)}{s'} \qquad (E_2)$$

$$\underset{(n,1)}{s^2} + \underset{(n,1)}{V_k} = \underset{(n,1)}{s'^2}, \qquad (E_k)$$

iz kojih se određuje vektor popravaka kvadratno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{V_k} = \underset{(n,n)}{(s' + s)}\ \underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{(s_0 + s + v - f)}\ \underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{(2s_0 + v - 2f)}\ \underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{(2s + v)}\ \underset{(n,1)}{v} \ldots \underset{(n,n)}{P_k}, \qquad (B_1)$$

gdje je $(s' + s)$ dijagonalna matrica.

Na osnovu jednačina (B_1) proističe da, ignorisanjem linearizacije odnosno vektora popravaka (A), vektor popravaka kvadratno merenih dužina nije moguće odrediti. Matrica težina kvadratno merenih dužina dobija se primenom zakona rasprostiranja grešaka na jednačine popravaka (B_1)

$$\underset{(n,n)}{P_k} = \{\underset{(n,n)}{(s' + s)}\ \underset{(n,n)}{p^{-1}}\ \underset{(n,n)}{(s' + s)}\}^{-1} = \underset{(n,n)}{(s' + s)^{-1}}\ \underset{(n,n)}{p}\ \underset{(n,n)}{(s' + s)^{-1}}. \qquad (C_1)$$

Pomoću vektora popravaka linearno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,n)}{(s'+s)^{-1}} \underset{(n,1)}{V_k} \qquad (D_1)$$

ostvario bi se dokaz o jednakosti suma kvadrata popravaka

$$v^T p v = V_k^T (s'+s)^{-1} p (s'+s)^{-1} V_k = V_k^T P_k V_k.$$

Vračarić (1990) osmišljava modalitet određivanja vektora popravaka kvadratno merenih dužina postupkom koji se odlikuje nespretno nabačenim proizvoljnostima. Uvodi pretpostavku da su linearne popravke merenja jednake slobodnim članovima ($v_i = f_i$) u dijagonalnoj matrici ($s_0 + s + v - f$) jednačina (B_1). Na taj način ostvaruje neadekvatno određivanje vektora popravaka i matrice težina kvadratno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{V_k} \approx \underset{(n,n)}{(s_0+s)} \underset{(n,1)}{v}, \quad \underset{(n,n)}{P_k} \approx \underset{(n,n)}{(s_0+s)^{-1}} \underset{(n,n)}{p} \underset{(n,n)}{(s_0+s)^{-1}}. \qquad (B_0, C_0)$$

Sličnim približnim vrednostima rezultirala bi pretpostavka da su linearne popravke merenja jednake dvostrukim slobodnim članovima ($v_i = 2f_i$) u dijagonalnoj matrici ($2s_0 + V - 2f$) jednačina (B_1), tj.

$$\underset{(n,1)}{V_k} \approx \underset{(n,n)}{2s_0} \underset{(n,1)}{v}, \quad \underset{(n,n)}{P_k} \approx \underset{(n,n)}{(2s_0)^{-1}} \underset{(n,n)}{p} \underset{(n,n)}{(2s_0)^{-1}}. \qquad (B_{01}, C_{01})$$

Najzad, proizvoljne vrednosti vektora popravaka i matrice težina kvadratno merenih dužina ostvarile bi se i uvođenjem pretpostavke da su linearne popravke merenja nule ($v_i = 0$) u dijagonalnoj matrice ($2s + v$) jednačina (B_1), tj.

$$\underset{(n,1)}{V_k} \approx \underset{(n,n)}{2s} \underset{(n,1)}{v}, \quad \underset{(n,n)}{P_k} \approx \underset{(n,n)}{(2s)^{-1}} \underset{(n,n)}{p} \underset{(n,n)}{(2s)^{-1}}. \qquad (B_{02}, C_{02})$$

Ako bi se problematika ocenjivanja sistematskih i slučajnih grešaka mogla razrešiti pomoću popravaka kvadratno merenih dužina, tada bi se između popravaka fiktivno i kvadratno merenih dužina uspostavila sledeća relacija:

$$\underset{(\varphi,1)}{V} = \underset{(\varphi,n)}{Q^T} \underset{(n,n)}{(s'+s)^{-1}} \underset{(n,1)}{V_k}. \qquad (11)$$

Matrice težina fiktivno i kvadratno merenih dužina date su jednačinama (8) i (C_1)

$$\underset{(\varphi,\varphi)}{P} = \underset{(\varphi,\varphi)}{(Q^T p^{-1} Q)^{-1}}, \qquad \underset{(n,n)}{P_k} = \underset{(n,n)}{(s'+s)^{-1}} \underset{(n,n)}{p} \underset{(n,n)}{(s'+s)^{-1}}.$$

Pomoću vektora popravaka kvadratno merenih dužina

$$\underset{(n,1)}{V_k} = \underset{(n,n)}{(s'+s)} \underset{(n,n)}{p^{-1}} \underset{(n,\varphi)}{Q} \underset{(\varphi,\varphi)}{(Q^T p^{-1} Q)^{-1}} \underset{(\varphi,1)}{V}, \qquad (12)$$

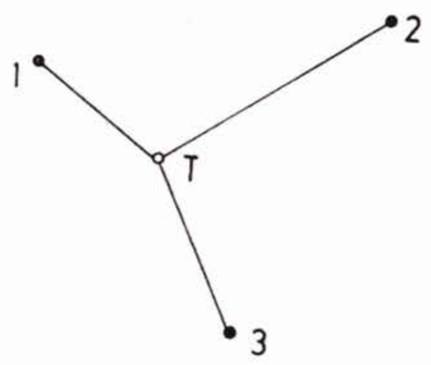
mogla bi se dokazati jednakost suma kvadrata popravaka

$$V_k^T P_k V_k = V^T (Q^T p^{-1} Q)^{-1} Q^T p^{-1} (s' + s)(s' + s)^{-1} p (s' + s)^{-1} (s' + s) p^{-1} Q (Q^T p^{-1} Q)^{-1} V = V^T P V.$$

Da bi se praktički pristup Vračarića (1990) uporedio sa napred izloženim, sledi ilustracija numeričkim primerima koji se preuzimaju iz rada (Vračarić 1987). Obradom podataka merenja primarno se određuje, u primerima 1, 3 i 5a, popravaka linearno, a u primerima 2, 4 i 5b vektor popravaka kvadratno merenih veličina. Potrebno je utvrditi koji se rezultati međusobno slažu u primerima 1 i 2, 3 i 4 kao i 5a i 5b.

1. primer

Izravnanjem po metodi posrednih merenja, na osnovu skice, datih i merenih podataka tabele 1, odrediti koordinate tačke T koristeći se linearnim vrednostima merenih dužina i pretpostavljajući da su sva merenja istog stepena poverenja.



Sl. 1

Tabela 1

T_n	y_i	x_i	s_i	s_{0i}
1	6 900	7 050	111,75	111,80 339
2	7 209	7 300	365,70	365,62 412
3	7 060	6 800	208,80	208,80 613
T_0	7 000	7 000		

Matrica jednačina popravaka, težina i vektor odstupanja

$$a_{is} = -\cos \nu^{i}_{TO}; \qquad b_{is} = -\sin \nu^{i}_{TO}; \qquad f_{is} = s_{0i} - s_i$$

$$A = \begin{Vmatrix} -0{,}447\,213 & 0{,}894\,428 \\ -0{,}820\,515 & -0{,}571\,625 \\ 0{,}957\,827 & -0{,}287\,347 \end{Vmatrix} \quad p = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad f = \begin{Vmatrix} 5{,}339 \text{ cm} \\ -7{,}588 \\ 0{,}613 \end{Vmatrix}.$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = A^T A = \begin{Vmatrix} 1,790\,6767 & -0,206\,2017 \\ -0,206\,2017 & 1,209\,3247 \end{Vmatrix} \quad n = A^T f = \begin{Vmatrix} 4,425\,5455 \\ 8,936\,6978 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,569\,6325 & 0,097\,1279 \\ 0,097\,1279 & 0,843\,4688 \end{Vmatrix} \quad x = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} -3,389 \text{ cm} \\ -7,968 \end{Vmatrix}$$

Vektori popravaka linearno i kvadratno merenih dužina

$$v = Ax + f = \begin{Vmatrix} -0,272 \text{ cm} \\ -0,253 \\ -0,343 \end{Vmatrix} \quad V_k = (s' + s)\, v = \begin{Vmatrix} -\ 6\,079,126 \text{ cm}^2 \\ -18\,504,355 \\ -14\,323,562 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti traženih i merenih veličina

$$v^T v = 0,2556; \quad \mu_0 = \pm 0,5065; \quad \mu_x = \pm 0,38 \text{ cm};$$

$$\mu_y = \pm 0,46 \text{ cm}; \qquad \mu_{s1} = \mu_{s2} = \mu_{s3} = \pm 0,51 \text{ cm}.$$

Vektor popravaka linearno merenih dužina u radu (7) poprima, umesto u granicama tačnosti računanja saglasne, dve međusobno različite vrednosti.

$$-v^T = (Ax + f)^T = \| -0,339 \text{ cm} \ -0,316 \text{ cm} \ -0,429 \text{ cm} \|$$

$$-v^T = \sqrt{(y_i - y_T)^2 + (x_i - x_T)^2} - s_i = \| 0,002 \text{ cm} \ 0,097 \text{ cm} \ -0,815 \text{ cm} \|$$

2. primer

Izravnanjem po metodi posrednih merenja, na osnovu podataka datih u primeru 1, odrediti koordinate tražene tačke T koristeći se kvadratnim vrednostima merenih dužina.

Matrica jednačina popravaka, težina i vektor odstupanja

$$\bar{a}_{is} = -2\,(x_i - x_{TO}); \qquad \bar{b}_{is} = -2\,(y_i - y_{TO});$$

$$P_k = (2s)^{-1}\, p\, (2s)^{-1}; \qquad F_k = (s_0^2 - s^2)$$

$$B = \begin{Vmatrix} -10\,000 & 20\,000 \\ -60\,000 & -41\,800 \\ 40\,000 & -12\,000 \end{Vmatrix} \quad P_k = \begin{Vmatrix} 2,00\,191 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & 0,18\,693 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0,57\,343 \cdot 10^{-9} \end{Vmatrix}$$

$$F_k = \begin{Vmatrix} 119\,360 \text{ cm}^2 \\ -555\,000 \\ 25\,590 \end{Vmatrix}$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = B^T P_k B = \begin{Vmatrix} 1{,}790\,6270 & -0{,}206\,8080 \\ -0{,}206\,8080 & 1{,}209\,9494 \end{Vmatrix} \quad n = B^T P_k F_k = \begin{Vmatrix} 4{,}422\,252 \\ 8{,}939\,460 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}569\,7099 & 0{,}097\,3764 \\ 0{,}097\,3764 & 0{,}843\,1246 \end{Vmatrix} \quad x = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} -3{,}389\ \text{cm} \\ -7{,}968 \end{Vmatrix}$$

Vektori popravaka kvadratno i linearno merenih dužina

$$V_k = Bx + F_k = \begin{Vmatrix} -\ 6\,110{,}0\ \text{cm}^2 \\ -18\,597{,}6 \\ -14\,354{,}0 \end{Vmatrix} \quad v = (2s)^{-1} V_k = \begin{Vmatrix} -0{,}273\ \text{cm} \\ -0{,}254 \\ -0{,}344 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti traženih i merenih veličina

$$V_k^T p_k V_k = 0{,}2575; \quad \mu_0 = \pm 0{,}5074; \quad \mu_x = \pm 0{,}38\ \text{cm};$$
$$\mu_y = \pm 0{,}46\ \text{cm}; \quad \mu_{s1} = \mu_{s2} = \mu_{s3} = \pm 0{,}51\ \text{cm}.$$

Vektor popravaka kvadratno merenih dužina u radu (Vračarić 1987) sračunat je pomoću netačno izvedene matrice težina kvadratno merenih dužina $P_k = s^{-1} p s^{-1} = s^{-1} s^{-1}$. Ovu matricu težina trebalo je odrediti primenom zakona rasprostiranja grešaka $P_k = (2s)^{-1} p (2s)^{1-} = (2s)^{-1} (s)^{-1}$. Proizlazi da je $v^T p v = 4 V_k^T P_k V_k$, a u ovom radu je pokazano da je $v^T p v = V_k^T P_k V_k$. Otuda su suma kvadrata popravaka $V_k^T P_k V_k = 1{,}5995$ i srednja greška jedinice težine $\mu_0 = \pm\, 1{,}2647$ pogrešno određene veličine.

3. primer

Izvršiti izravnanje koordinata tačke određene lučnim presekom na osnovu podataka tabele 1, s tim što se umesto jedinične uvodi matrica težina recipročno merenih dužina

$$p = s^{-1} = \langle 8{,}94\,854 \cdot 10^{-5}\ 2{,}73\,448 \cdot 10^{-5}\ 4{,}78\,927 \cdot 10^{-5} \rangle.$$

Matrica jednačina popravaka A i vektor odstupanja f isti su kao u primeru 1. Matrica normalnih jednačina f vektor slobodnih članova

$$N = A^T p A = \begin{Vmatrix} 0{,}802\,4507 & -0{,}361\,5014 \\ -0{,}361\,5014 & 0{,}844\,7790 \end{Vmatrix} \quad n = A^T p f = \begin{Vmatrix} -0{,}15\,291 \\ 5{,}37\,496 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 1{,}543\,7924 & 0{,}660\,6261 \\ 0{,}660\,6261 & 1{,}466\,4395 \end{Vmatrix} \quad x = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} -3{,}315\ \text{cm} \\ -7{,}781 \end{Vmatrix}$$

Vektori popravaka linearno i kvadratno merenih rastojanja

$$v = Ax + f = \begin{Vmatrix} -0{,}138 \text{ cm} \\ -0{,}420 \\ -0{,}326 \end{Vmatrix} \qquad V_k = (s' + s)\, v = \begin{Vmatrix} -\ 3\,084{,}281 \text{ cm}^2 \\ -30\,718{,}623 \\ -13\,613{,}653 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti izravnatih i merenih veličina

$$v^T pv = 0{,}1162; \quad \mu_0 = \pm 0{,}341; \quad \mu_x = \pm 0{,}42 \text{ cm};$$

$$\mu_y = \pm 0{,}41 \text{ cm}; \quad \mu_{s1} = \pm 0{,}36 \text{ cm}; \quad \mu_{s2} = \pm 0{,}65 \text{ cm}, \quad \mu_{s3} = \pm 0{,}49 \text{ cm}.$$

Vektor popravaka linearno merenih dužina u radu (Vračarić 1987) poprima, umesto u granicama tačnosti računanja saglasne, dve međusobno različite vrednosti:

$$-V^T = (Ax + f)^T = \| -0{,}172 \text{ cm} \quad -0{,}524 \text{ cm} \quad -0{,}407 \text{ cm} \|$$

$$-v^T = \sqrt{(y_i - y_T)^2 + (x_i - x_T)^2} - s_i =$$

$$= \| 0{,}169 \text{ cm} \quad -0{,}114 \text{ cm} \quad -0{,}793 \text{ cm} \|$$

4. primer

Izvršiti izravnanje koordinata tražene tačke T koristeći se kvadratima merenih rastojanja. Matrica jednačine popravaka i vektor slobodnih članova isti su kao u primeru 2, dok je matrica težina kvadratno merenih dužina

$$P_k = (2s)^{-1}\, s^{-1}\, (2s)^{-1} =$$

$$= \langle 1{,}79\,143 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}05\,112 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}27\,463 \cdot 10^{-9} \rangle.$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = B^T P_k B = \begin{Vmatrix} 0{,}802\,583 & -0{,}361\,900 \\ -0{,}361\,900 & 0{,}845\,437 \end{Vmatrix} \qquad n = B^T P_k F_k = \begin{Vmatrix} -0{,}15\,484 \\ 5{,}37\,809 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 1{,}544\,0031 & 0{,}660\,9300 \\ 0{,}660\,9300 & 1{,}465\,7398 \end{Vmatrix} \qquad x = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} -3{,}315 \text{ cm} \\ -7{,}781 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka kvadratno i linearno merenih rastojanja

$$V_k = Bx + F_k = \begin{Vmatrix} -\ 3\,110{,}0 \text{ cm}^2 \\ -30\,854{,}2 \\ -13\,638{,}0 \end{Vmatrix} \qquad v = (2s)^{-1} V_k = \begin{Vmatrix} -0{,}139 \text{ cm} \\ -0{,}422 \\ -0{,}327 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti merenih i izravnatih veličina

$$V_k^T P_k V_k = 0{,}1170; \quad \mu_0 = \pm 0{,}342; \quad \mu_x = \pm 0{,}42\ \text{cm}; \quad \mu_y = \pm 0{,}41\ \text{cm};$$
$$\mu_{s1} = \pm 0{,}36\ \text{cm}; \quad \mu_{s2} = \pm 0{,}65\ \text{cm}; \quad \mu_{s3} = \pm 0{,}49\ \text{cm}.$$

Vektor popravaka kvadratno merenih dužina u radu (Vračarić 1987) sračunat je pomoću izvedene matrice težina kvadratno merenih rastojanja $P_k = s^{-1} ps^{-1} = s^{-1} s^{-1} s^{-1}$. Ova matrica težina određuje se primenom zakona rasprostiranja grešaka $P_k = (2s)^{-1}\, p(2s)^{-1} = (2s)^{-1}\, s^{-1}(2s)^{-1}$. Zbog toga su sume kvadrata popravaka $V_k^T P_k V_k = 0{,}727$ i srednja greška jedinice težine $\mu_o = \pm\ 0{,}8526$ pogrešno određene veličine.

5. primer

Na osnovu datih i merenih podataka izloženih u tabeli 2. odrediti koordinate tačke T.

Tabela 2

T_n	y_i m	x_i m	α_i 0 I II	ν^i_{TO} 0 I II	α_{0i} 0 I II	s_i m	m_s ±cm	s_{0i} m	p_i
1	6 900	7 050	0 00 00	296 33 54	0 00 00	111,75	5	111,80 339	4
2	7 209	7 300	98 18 00	34 51 49	98 17 55	365,70	12	365,62 412	0,694
3	7 060	6 800	226 44 06	163 18 03	226 44 09	208,80	8	208,80 613	1,562
T_0	7 000	7 000			$z_0 = 63°26'06''$				

ako je srednja greška opažanog pravca $m_p = \pm\ 10''$.

a. Kada se koriste linearne vrednosti merenih veličina

$$a_{is} = -\cos \nu^i_{TO}; \; b_{is} = -\sin \nu^i_{TO}; \; f_{is} = s_{0i} - s_i; \; f_{ip} = \nu^i_{TO} - \alpha_i - z_0;$$

$$a_{ip} = \rho'' \frac{\sin \nu^i_{TO}}{s_{0i}}; \; b_{ip} = -\rho'' \frac{\cos \nu^i_{TO}}{s_{0i}}; \; \text{red}\ a_{ip} = a_{ip} - \frac{[a]_p}{n};$$

$$\text{red}\ b_{ip} = b_{ip} - \frac{[b]_p}{n}; \; \text{red}\ f_{ip} = f_{ip} - \frac{[f]_p}{n}.$$

Matrica jednačina popravaka težina i vektor odstupanja

$$A = \begin{Vmatrix} -0{,}447\,213 & 0{,}894\,428 \\ -0{,}820\,515 & -0{,}571\,625 \\ 0{,}957\,827 & -0{,}287\,347 \\ -13{,}021\,909 & -7{,}111\,330 \\ 6{,}704\,101 & -3{,}489\,634 \\ 6{,}317\,807 & 10{,}600\,964 \end{Vmatrix}; \; p = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}694 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}562 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$f = \begin{Vmatrix} 5{,}339 \text{ cm} \\ -7{,}588 \\ 0{,}613 \\ 0{,}667 \\ -4{,}333 \\ 3{,}667 \end{Vmatrix}$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = A^{T}pA = \begin{Vmatrix} 257{,}13\,001 & 134{,}47\,867 \\ 134{,}47\,867 & 178{,}68\,167 \end{Vmatrix} \qquad n = A^{T}pf = \begin{Vmatrix} -18{,}879\,749 \\ 71{,}087\,547 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}006\,414\,561 & -0{,}004\,827\,701 \\ -0{,}004\,827\,701 & 0{,}009\,230\,808 \end{Vmatrix} \qquad x = -N^{-1}n = \begin{Vmatrix} 0{,}464 \text{ cm} \\ -0{,}747 \end{Vmatrix}$$

Vektori popravaka linearno i kvadratno merenih veličina

$$v = Ax + f = \begin{Vmatrix} 4{,}463 \text{ cm} \\ -7{,}542 \\ 1{,}272 \\ -0{,}''063 \\ 1{,}''384 \\ -1{,}''320 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4{,}463 \text{ cm} \\ -7{,}542 \\ 1{,}272 \\ -0{,}003 \\ 0{,}245 \\ -0{,}134 \end{Vmatrix};$$

$$V_k\,(s' + s)\,v = \begin{Vmatrix} 90\,767{,}972 \text{ cm}^2 \\ -551\,564{,}990 \\ 53\,120{,}336 \\ 67{,}066 \\ 17\,917{,}440 \\ -5\,595{,}922 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 99\,767{,}972 \text{ cm}^2 \\ -551\,564{,}990 \\ 53\,120{,}336 \\ -1\,408{,}''386 \\ 101\,215{,}''250 \\ -55\,124{,}''009 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti traženih i merenih veličina

$$v^{T}pv = 122; \quad \mu_0 = \pm 6{,}38; \quad \mu_x = \pm 0{,}51 \text{ cm}; \quad \mu_y = \pm 0{,}61 \text{ cm};$$

$$\mu_{s1} = \pm 3{,}19 \text{ cm}; \quad \mu_{s2} = \pm 5{,}31 \text{ cm}; \quad \mu_{s3} = \pm 5{,}10 \text{ cm}.$$

Vektori popravaka linearnih merenja određeni u radu (Vračarić 1987) hendikepirani su netačnostima:

— vektor popravaka linearno merenih dužina $v_s^T = (A_s x + f_s)^T = \| 5{,}38 \text{ cm} \; -8{,}01 \text{ cm} \; 0{,}70 \text{ cm} \|$ umesto da se u okviru tačnosti računanja slaže, znatno se razlikuje od vektora popravaka linearno merenih dužina $v_s^T = \{(y_i - y_T)^2 + (x_i - x_T)^2\}^{1/2} - s_i = \| 4{,}957 \text{ cm} \; -7{,}580 \text{ cm} \; 0{,}909 \text{ cm} \|$;

— vektor popravaka pravaca $v_p^T = (A_p x + f_p) = \| 0{,}''17 \; -1''79 \; 1''61 \|$ određen je sa pogrešnim predznacima. Neophodnost promene predznaka popravaka pravaca uzrokovana je pogrešno primenjenim predznacima koeficijenata odstojanja matrice A, tj,. $a_{is} \neq \cos\nu_{TO}^{i}$, nego je $a_{is} = -\cos\nu_{TO}^{i}$. Isto tako $b_{is} \neq \sin\nu_{TO}^{i}$, nego je $b_{is} = -\sin\nu_{TO}^{i}$.

b. *Kada se koriste kvadrati merenih veličina*

$$\bar{a}_{is} = -2(x_i - x_{TO}); \quad \bar{b}_{is} = -2(y_i - y_{TO}); \quad F_{is} = s_{0i}^2 - s_i^2$$

$$\bar{a}_{ip} = 2s_i \text{ red } a_{ip}; \ \bar{b}_{ip} = 2s_i \text{ red } b_{ip}; \ F_{ip} = 2s_i \text{ red } f_{ip} \qquad P_{ki} = \frac{m_p^2}{(2s_i)^2\, m_s^2}.$$

Matrica jednačina popravaka, težina i vektor odstupanja

$$B = \begin{Vmatrix} -10\,000 & 20\,000 \\ -60\,000 & -41\,800 \\ 40\,000 & -12\,000 \\ -291\,039{,}66 & -158\,938{,}22 \\ 490\,337{,}94 & -255\,231{,}83 \\ 263\,831{,}62 & 442\,696{,}25 \end{Vmatrix} \qquad F_k = \begin{Vmatrix} 119\,360 \text{ cm}^2 \\ -555\,000 \\ 25\,590 \\ 14\,907{,}45 \\ -316\,915{,}62 \\ 153\,133{,}92 \end{Vmatrix}$$

$$P_k = \langle 8{,}00\,764 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}12\,973 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}89\,570 \cdot 10^{-9} \quad 2{,}00\,191 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}18\,694 \cdot 10^{-9} \quad 0{,}57\,343 \cdot 10^{-9} \rangle.$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = B^T P_k B = \begin{Vmatrix} 257{,}130 & 134{,}476 \\ 134{,}476 & 178{,}687 \end{Vmatrix} \qquad n = B^T P_k F_k = \begin{Vmatrix} -18{,}888 \\ 71{,}102 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}00\,641\,327 & -0{,}00\,482\,649 \\ -0{,}00\,482\,649 & 0{,}00\,922\,867 \end{Vmatrix} \qquad x = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} 0{,}464 \text{ cm} \\ -0{,}747 \end{Vmatrix}$$

Vektori popravaka kvadratno i linearno merenih veličina

$$V_k = Bx + F_k = \begin{Vmatrix} 99\,780{,}0 \text{ cm}^2 \\ -551\,615{,}4 \\ 53\,114{,}0 \\ -1\,408{,}''1 \\ 101\,259{,}''4 \\ -55\,142{,}''3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 99\,780{,}0 \text{ cm}^2 \\ -551\,615{,}4 \\ 53\,114{,}0 \\ -76{,}3 \\ 17\,952{,}9 \\ -5\,582{,}0 \end{Vmatrix};$$

$$v = (2s)^{-1} V_k = \begin{Vmatrix} 4{,}464 \text{ cm} \\ -7{,}542 \\ 1{,}272 \\ -0{,}003 \\ 0{,}245 \\ -0{,}134 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4{,}464 \text{ cm} \\ -7{,}542 \\ 1{,}272 \\ -0{,}''063 \\ 1{,}''384 \\ -1{,}''320 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti izravnatih i merenih veličina

$$V_k^T P_k V_k = 122 \quad \mu_0 = \pm 6{,}38; \quad \mu_x = \pm 0{,}51 \text{ cm}; \quad \mu_y = \pm 0{,}61 \text{ cm};$$

$$\mu_{s1} = \pm 3{,}19 \text{ cm}; \quad \mu_{s2} = \pm 5{,}31 \text{ cm}; \quad \mu_{s3} = \pm 5{,}10 \text{ cm}.$$

Vektor popravaka kvadratno merenih veličina određen u radu (Vračarić 1987) hendikepiran je netačnostima:

— pogrešno su određeni koeficijenti matrice jednačine popravaka kvadratno merenih veličina B. Naime, $\overline{a}_{is} \neq 2(x_i - x_{TO})$; $\overline{b}_{is} \neq 2(y_i - y_{TO})$; $\overline{a}_{ip} \neq a_{ip}$; $\overline{b}_{ip} \neq b_{ip}$, nego je $\overline{a}_{is} = -2(x_i - x_{TO})$; $\overline{b}_{is} = -2(y_i - y_{TO})$; $\overline{a}_{ip} = -2\rho'' b_{is}$; $\overline{b}_{ip} = 2\rho'' a_{is}$;

— pogrešno su određena kvadratna odstupanja pravaca; naime, $F_{ip} \neq f_{ip}$ nego je $F_{ip} = 2s_i f_{ip}$;

— pogrešno je određena matrica težina pravca; naime, $P_{kp} \neq <1\ 1\ 1>$, nego je $P_{kp} = (2s)^{-1}(2s)^{-1}$.

Usled gore pobrojanih grešaka vektor popravaka kvadratno merenih veličina $V_k^T = (Bx + F_k)^T = \| 120\,314{,}72\ cm^2 - 585\,673{,}45\ cm^2\ 29\,395\ cm^2\ 0''17 - 1''79\ 1''61 \|$ umesto kvadratnih sadrži linearne popravke pravaca pogrešnog predznaka $V_{kp}^T = \| 0{,}17 - 1{,}''79\ 1'',61 \|$.

Upoređenjem rezultata izravnanja u gornjim primerima pokazalo se da je vektor popravaka kvadratno merenih veličina:

— $V_k^T = \| -6\,111{,}0\ cm^2 - 18\,597{,}6\ cm^2 - 14\,354{,}0\ cm^2 \|$ netačno određen u primeru 2. Njegova korektna vrednost $V_k^T = \| -6\,079{,}126\ cm^2 - 18\,504{,}355\ cm^2 - 14323{,}562\ cm^2 \|$ sračunata je u primeru 1.

— $V_k^T = \| -3\,110{,}0\ cm^2 - 30\,854{,}2\ cm^2 - 13\,638{,}0\ cm^2 \|$ netačno određen u primeru 4. Njegova korektna vrednost $V_k^T = \| -3\,084{,}281\ cm^2 - 30\,718{,}623\ cm^2 - 13\,613{,}653\ cm^2 \|$ sračunata je u primeru 3.

— $V_k^T = \| 99\,780{,}0\ cm^2 - 551\,615{,}4\ cm^2\ 53\,114{,}0\ cm^2 - 76{,}3\ cm^2\ 17\,952{,}9\ cm^2 - 5{,}582{,}0\ cm^2 \|$ netačno određen u primeru 5b. Njegova korektna vrednost $V_k^T = \| 99\,767{,}972\ cm^2 - 551\,564{,}99\ cm^2\ 53\,120{,}336\ cm^2 - 67{,}066\ cm^2\ 17\,917{,}440\ cm^2 - 5\,595{,}922\ cm^2 \|$ sračunata je u primeru 5a.

Na osnovu svega napred iznetog proizlazi da, za razliku od u ovom radu izloženih ciljeva izravnanja po metodi fiktivnih merenja, u radu (Vračarić 1990) predložene ciljeve izravnanja po metodi posrednih merenja kada u izravnanju umesto merenih dužina učestvuju njihovi kvadrati, nije moguće kvantifikovati racionalnim, svrsishodnim i dovoljno tačnim. Pored toga, matematička obrada podataka kojom se uspostavljaju popravke kvadratno merenih dužina neprimereno velikih dimenzija (ignorisanjem nepomerenosti grešaka), u neskladu je sa teorijom grešaka.

LITERATURA

Böhm, J.: Analiza rezultata merenja i izravnanja, Prag 1964. (prevod sa češkog).

Feil, L.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja I, Zagreb 1989.

Hazay, I.: Kiegyenlitö számitások, Budapest 1968.

Klak, S.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Zagreb 1986.

Mihailović, K.: Račun izravnanja 1, Beograd 1981.

Vračarić, K.: Primena posrednog izravnanja kada se koriste kvadrati mernih veličina (dužina), Geodetski list, 1987, 7—9, 243—253.

Vračarić, K.: Primedbe i greške koje to nisu, Geodetski list, 1990, 1—3, 53—57.

ADJUSTMENT BY THE METHOD OF FICTIOUS MEASUREMENT

In order to realize so called »square estimation«, based on theoretical studies and referring to the possibility to replace the actual equation of corrections with a ficitous one, a new method of determination of weights of fictitously measured lengths is proposed in the paper (Geod. list 1987, 7—9, 243—253). However, the new proposed weight matrix as well as correction vector of measured squares of length represent aproximated valus based on the arbirary decision. Except in the case of the equatilization based on the intermediate measurements method, the new proposed correction vector and weight matrix of the square measured length, can be in the more correct way enclosed by means of a more rational procedure, i. e. by means of the equalization based on the fictious measurements method.

Primljeno: 1990-12-10