UDK 528.91:528.235
Originalni znanstveni članak

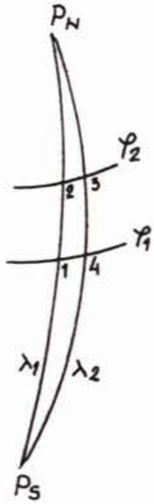
JEDAN KRAĆI ALGORITAM ZA RAČUNANJE POVRŠINE ELIPSOIDALNOG TRAPEZA

Drago ŠTEMBERGER — Beograd*

SAŽETAK: U radu se daje prikaz jednog algoritma za računanje površine elipsoidalnog trapeza, koji je nešto kraći i jednostavniji za primenu od u literaturi uobičajeno upotrebljavanog izraza.

1. KONVENCIONALNI IZRAZ ZA RAČUNANJE

Za računanje površine trapeza na elipsoidu, koji je omeđen paralelama φ_1 i φ_2 i meridijanima λ_1 i λ_2 (slika 1), upotrebljava se u literaturi poznati izraz (1) (vidi npr. Borčić 1955, Jovanović 1983):



Slika 1. elipsoidalni trapez

* Doc. dr. Drago Štemberger, dipl. inž., Vojnogeografski institut, Beograd.

$$P = 2 \cdot b^2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \left(A \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos\varphi_0 - B \cdot \sin\frac{3\Delta\varphi}{2} \cdot \cos 3\varphi_0 + \right.$$

$$\left. + C \cdot \sin\frac{5\Delta\varphi}{2} \cdot \cos 5\varphi_0 - D \cdot \sin\frac{7\Delta\varphi}{2} \cdot \cos 7\varphi_0\right), \quad (1)$$

gde su:

b — mala poluosa elipsoida

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

e^2 — prvi brojni ekscentricitet elipsoida (2)

$$A = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{8} + \frac{5e^6}{16} + \frac{35e^8}{128} + \ldots$$

$$B = \frac{e^2}{6} + \frac{3e^4}{16} + \frac{3e^6}{16} + \frac{35e^8}{192} + \ldots$$

$$C = \frac{3e^4}{80} + \frac{e^6}{16} + \frac{5e^8}{64} + \ldots$$

$$D = \frac{e^6}{112} + \frac{5e^8}{256} + \ldots$$

Konstante A, B, C i D sračunavaju se, kao što je poznato, unapred za određene parametre elipsoida.

2. IZRAZ ZA RAČUNANJE PREKO EKVIVALENTNOG PRESLIKAVANJA ELIPSOIDA NA LOPTU

Pri ekvivalentnom preslikavanju elipsoida na loptu uslovljava se da se ravni ekvatora ova dva tela poklapaju, da su površine oba tela iste, te da se paralele sa elipsoida preslikavaju na loptu opet kao paralele. Na osnovu toga u matematičkoj kartografiji (vidi npr. Borčić 1955, Jovanović 1983) izvode se poznati izrazi za korespondentne koordinate na sferi:

$$\lambda' = \lambda$$

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi + \frac{2}{3} \cdot e^2 \sin^3\varphi + \frac{3}{5} \cdot e^4 \sin^5\varphi + \frac{4}{7} \cdot e^6 \sin^7\varphi + \ldots}{1 + \frac{2}{3} \cdot e^2 + \frac{3}{5} \cdot e^4 + \frac{4}{7} \cdot e^6 + \ldots}, \quad (3)$$

ili kraći izraz:

$$\varphi' = \varphi - \alpha \cdot \sin 2\varphi + \beta \cdot \sin 4\varphi - \gamma \cdot \sin 6\varphi, \quad (4)$$

gde su:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{3} \cdot e^2 + \frac{31}{184} \cdot e^4 + \frac{59}{560} \cdot e^6 + \ldots \\
\beta &= \frac{17}{360} \cdot e^4 + \frac{61}{1260} \cdot e^6 + \ldots \\
\gamma &= \frac{383}{45360} \cdot e^6 + \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Za poluprečnik elipsoidu ekvivalentne sfere izvodi se također poznati izraz:

$$R = a \cdot \sqrt{(1 - e^2) \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot e^2 + \frac{3}{5} \cdot e^4 + \frac{4}{7} \cdot e^6 + \frac{5}{9} \cdot e^8 + \ldots\right)}. \tag{6}$$

Površina pojasa na sferi može se odrediti po izrazu:

$$P_S = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot V,$$

pri čemu je u našem slučaju:

$$V = R \cdot (\sin \varphi'_2 - \sin \varphi'_1).$$

Površina celog pojasa biće prema ovome:

$$P_S = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (\sin \varphi'_2 - \sin \varphi'_1). \tag{7}$$

Površina dela pojasa, omeđenog meridijanima λ_1 i λ_2, odnosno površina elipsoidalnog trapeza, može se sračunati iz odnosa:

$$P = \frac{P_S \cdot \Delta\lambda}{2\pi},$$

ili s obzirom na (7) dobija se jednostavan i kratak izraz:

$$P = R^2 \cdot (\sin \varphi'_2 - \sin \varphi'_1) \cdot \Delta\lambda, \tag{8}$$

pri čemu se R računa po izrazu (6), a φ_1 po izrazu (3) ili (4).

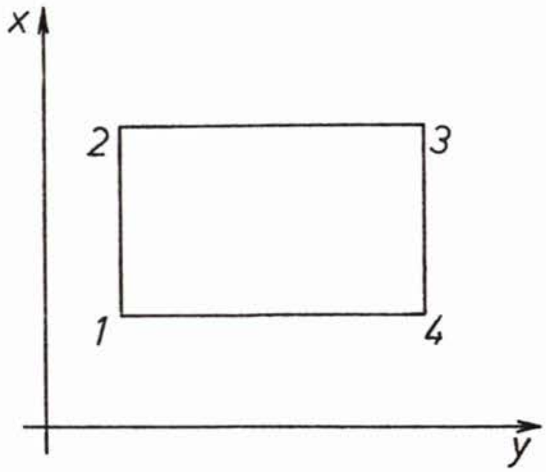
U tabeli 1 dati su koeficijenti α, β i γ, kao i poluprečnik ekvivalentne sfere za češće korišćene elipsoide.

Tabela 1: vrednosti koeficijenata α, β i γ i poluprečnika R

elipsoid	α ('')	β ('')	γ ('')	R (m)
Bessel	460.48496	0.4369	0.00052	6 370 289.51
Hayford	463.82880	0.4432	0.00053	6 371 227.71
Krasovski	461.80380	0.4394	0.00052	6 371 116.08

3. IZRAZ (8) PREKO LAMBERTOVE IZOCILINDRIČNE EKVIVALENTNE PROJEKCIJE

Do izraza (8) može se na jednostavan način doći i preko Lambertove izocilindrične ekvivalentne projekcije. S obzirom na činjenicu da se u ovoj projekciji meridijani i paralele preslikavaju u prave, međusobno upravne linije, to će se elipsoidni, odnosno ekvivalentni sferi trapez preslikati u pravougaonik (slika 2).



Sl. 2. Elipsoidalni trapez u Lambertovoj izocilindričnoj ekvivalentnoj projekciji

Površina ovog pravougaonika biće jednaka površini elipsiodalnog trapeza, odnosno:

$$P = (y_4 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (y_3 - y_2) \cdot (x_3 - x_4). \tag{9}$$

Pošto se u ovoj projekciji pravougle koordinate računaju po izrazima:

$$\begin{aligned} x_i &= R \cdot \sin \varphi_i' \\ y_i &= R \cdot \lambda_i, \end{aligned} \tag{10}$$

to se za površinu nakon uvrštenja (10) u (9) dobija izraz (8).

4. TAČNOST RAČUNANJA POVRŠINE ELIPSOIDALNOG TRAPEZA PO IZRAZU (8)

U praktičnoj primeni izraza (8) postavlja se pitanje sa kojom tačnošću treba imati R i φ', odnosno činioce α, β i γ, da bi se površina dobila sa potrebnom računskom tačnošću.

Tačnost krajnjeg rezultata, odnosno površine elipsoidalnog trapeza, može se naravno zadati unapred. Budući da se ova površina najčešće uzima u sklopu sa nekom merenom površinom, npr. na listu karte, može se poći od normalnog uslova da gornja granica apsolutne greške sračunate površine svih listova karte koji obuhvataju tretirano područje ne sme biti veća od gornje granice apsolutne greške merene površine na jednom listu karte, odnosno:

$$\delta P_L \leq \frac{\delta P_M}{n}, \tag{11}$$

gde je n broj listova karte.

Na osnovu (8) i uzimajući $d\varphi_1 \cong d\varphi_2 = \delta\varphi$, $dP_L = \delta P_L$ i $dR = \delta R$, dobija se:

$$\delta P_L = 2 \cdot R(\sin\varphi_2' - \sin\varphi_1') \cdot \Delta\lambda \cdot \delta R + R^2 \cdot (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \cdot \Delta\lambda \cdot \delta\varphi'.$$

Na osnovu (11) i uzimajući $\sin\varphi' \cong$ sing i $\cos\varphi' \cong \cos\varphi$, gornji izraz, nakon zanemarivanja beznačajnog dela uz δR, svodi se na:

$$(\delta\varphi')'' \leq \frac{\delta P_M \cdot (\rho'')^2}{R^2 \cdot \Delta\lambda''(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)}. \tag{12}$$

Ako se računanje φ' izvodi po (3), gornja granica apsolutne greške biće:

$$\delta(\sin\varphi') = \cos\varphi'\,\delta\varphi' \cong \cos\varphi \cdot \delta\varphi'. \tag{13}$$

Kada se računanje izvodi po (4) za gornje granice apsolutnih grešaka koeficijenata α, β i γ, ako se pretpostavi njihov podjednak uticaj na tačnost krajnjeg rezultata, dobija se:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &\leq \frac{\delta\varphi'}{3\sin 2\varphi} \\ \delta_\beta &\leq \frac{\delta\varphi'}{3\sin 4\varphi} \\ \delta_\gamma &\leq \frac{\delta\varphi'}{3\sin 6\varphi}. \end{aligned} \tag{14}$$

Primer:

Pri određivanju površine SFRJ po TK25/1 (Štemberger 1986) ima ukupno 2506 listova. Ako se uzme vrlo stroga tačnost digitalizovanja koordinata temena lista statičkim načinom od 0,05 mm, pri približnim dimenzijama lista 10 km × 10 km, maksimalna greška digitalizovanja iznosiće $\delta P_M = 50000\ m^2 = 5$ ha. Prema ovome za $\varphi_0 = 44°$, a na osnovu (12) dobija se $(\delta\varphi')'' \leq 0''.04$, ili strože 0,"01. Da bi se postigla ova računska tačnost, potrebno je u (3), na osnovu (13), postići tačnost $\sin\varphi'$ od 0.001. To je moguće zadržavajući se na prva tri člana brojioca i dva člana imenioca.

Ako se računanje vrši po (4), sledi na osnovu (14): $\delta\alpha \leq 0{,}''001$ $\delta\beta \leq 0{,}''01$ i $\delta\gamma \leq 0{,}''001$, što je moguće postići sa prva tri člana reda kod α, dva kod β i jednim članom kod γ.

5. UPOREĐENJE REZULTATA IZMEĐU IZRAZA (1) I (8)

Radi upoređenja rezultata računanja između konvencionalnoog izraza (1) i ovde prezentiranog (8), sračunate su površine koje zahvataju listovi topografskih karata razmera 1:25.000 (1. izdanje), 1:50.000, 1:100.000 i 1:200.000, izabranog testnog područja. Rezultati su dati u tabeli 2.

Tabela 2: površine listova karata sračunate po izrazima (1) i (8)

kartog. IZVOR	φ_0	površina po (1) (ha)	lista karte po (8) (a)	razlika (1)—(8) (ha)	relativna greška (%)
TK25/1	45 32 30	9039.8388	9039.8396	−0.0008	0.0000088
	45 37 30	9026.6062	9026.6048	+0.0014	0.0000155
	45 42 30	9013.3539	9013.3541	−0.0002	0.0000022
	45 47 30	9000.0821	9000.0812	+0.0009	0.0000100
	45 52 30	8986.7907	8986.7915	−0.0008	0.0000089
	45 57 30	8973.4797	8973.4779	+0.0018	0.0000201
	46 02 30	8960.1492	8960.1492	±0.0000	0.0000000
	46 07 30	8946.7992	8946.7993	−0.0001	0.0000011
	46 12 30	8933.4297	8933.4290	+0.0007	0.0000078
	46 17 30	8920.0408	8920.0411	−0.0003	0.0000034
	46 22 30	8906.6325	8906.6318	+0.0007	0.0000079
	46 27 30	8893.2048	8893.2040	+0.0008	0.0000090
TK50	45 37 30	54159.5979	54159.5988	−0.0008	0.0000015
	45 52 30	53920.7048	53920.7047	+0.0001	0.0000002
	46 07 30	53680.7562	53680.7569	−0.0007	0.0000013
	46 22 30	53439.7564	53439.7556	+0.0008	0.0000015
TK100	45 45 00	216160.6056	216160.6070	−0.0014	0.0000006
	46 15 00	214241.0254	214241.0250	+0.0004	0.0000002
TK200	46 00 00	860803.2623	860803.2639	−0.0016	0.0000002

Iz tabele 2 vidljivo je da su razlike između dva izraza minimalne i znatno ispod praktičnih potreba. Smatramo da se može zaključiti da je izraz (8) sa (4) primenljiv, kako u teoriji, tako i u praksi, i da ga je uputno upotrebljavati.

LITERATURA

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb 1955.

Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Vojnogeografski institut, Beograd 1983.

Štemberger, D. (1986): Analiza određivanja veličina većih teritorijalnih jedinica korišćenjem savremenih metoda i postupaka sa primenom na teritoriju SFRJ, dokt. disert., Građevinski fakultet, Beograd 1986.

A SHORTER ALGORITHM FOR CALCULATION AREA OF ELLIPSOIDAL TAPEZIUM

This article present an algorithm for calculation surface of elipsoidal trapezium which is shorter and simpler than the term which is usually use in references.

Primljeno: 1991-03-18