Ravnina u prostoru – nastavni materijali za samostalno učenje

Branka Gotovac[1], Sanja Tipurić – Spužević[2], Josipa Gotovac[3]

Uvod

Ravnina u prostoru dio je standardnog sadržaja iz analitičke geometrije prostora u okviru temeljnih matematičkih kolegija na većini tehničkih i prirodoslovnih fakulteta, i zastupljena je u mnogim knjigama i skriptama. U ovom je radu prikazana kroz materijale za samostalno učenje.

Materijali su koncipirani tako da potiču dubinski pristup učenju usmjeravajući studente na razumijevanje i povezivanje sadržaja koje uče, sugerirajući također da je za uspješno rješavanje zadataka nužno poznavanje i razumijevanje teorije koju studenti često zaobilaze.

Nastavni materijali za samostalno učenje sastoje se od šest dijelova, od kojih se prva tri odnose na teoretski dio (oblici jednadžbe ravnine, zadavanje ravnine i odnos dviju ravnina). U četvrtom dijelu izdvojene su najvažnije formule, u petom su dani zadatci za vježbu, a u šestome rješenja, odnosno odgovori na pitanja i zadatke iz prethodnih dijelova.

Autorice predlažu da se studentima daju kompletni nastavni materijali odjednom kako bi studenti sami mogli regulirati svoje učenje. Prethodno je potrebno, uz opis materijala, studentima dati i upute o redoslijedu i načinu rada.

Rad na materijalima u 1., 2. i 3. dijelu, redom, pružit će studentima teoretsku osnovu za rješavanje zadataka za vježbu, a nadopunjavanjem svih odgovora studenti će dobiti kompletirane materijale teoretske građe.

U 4. dijelu dane su formule, čime se studentima sugerira da je tek nakon razmatranja teoretskog dijela, koji će omogućiti razumijevanje formula, korisno izdvojiti one najvažnije. To se ujedno može smatrati sažetkom teoretskog dijela i pripremom za rješavanje zadataka.

[1]Branka Gotovac, Kemijsko – tehnološki fakultet, Sveučilište u Splitu
[2]Sanja Tipurić – Spužević, Kemijsko – tehnološki fakultet, Sveučilište u Splitu
[3]Josipa Gotovac, United World College, Mostar

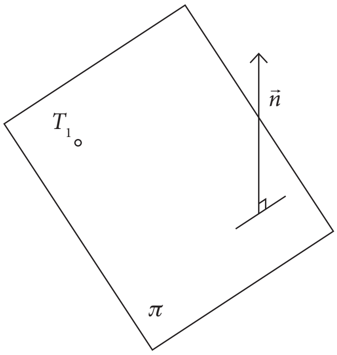
Zadatke za vježbu u 5. dijelu poželjno je rješavati redom, od jednostavnijih k složenijima, i to najprije bez pomoći, odnosno danih uputa kroz pitanja za promišljanje.

Studente se kroz materijale vodi, pitanjima potiče na razmišljanje i podsjeća na predznanja koja su im potrebna. Krajnju potvrdu svojih razmišljanja u vidu odgovora na postavljena pitanja odnosno rješenja zadataka studenti će naći u posljednjem, 6. dijelu.

Materijali se studentima mogu dati za rad na nastavi ili kod kuće. Po završetku rada preporuča se sa studentima prodiskutirati o njihovim iskustvima rada na materijalima, te eventualno pisanom provjerom kvantitativno provjeriti učinak takvog načina rada na znanja i vještine studenata.

1. Oblici jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina u prostoru. Ravnina π jednoznačno je određena ako je poznata jedna točka T_1 ravnine π i jedan vektor $\vec{n}$ okomit na ravninu π (Slika 1.). Izvest ćemo redom vektorsku jednadžbu ravnine, jednadžbu ravnine kroz točku, opću jednadžbu ravnine, te segmentni oblik jednadžbe ravnine. Na Slici 1. shematski je prikazan slijed izvođenja raznih oblika jednadžbe ravnine.



Slika 1. Slijed izvođenja raznih oblika jednadžbe ravnine

$$\Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=0 \quad \Rightarrow \quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad \Rightarrow$$

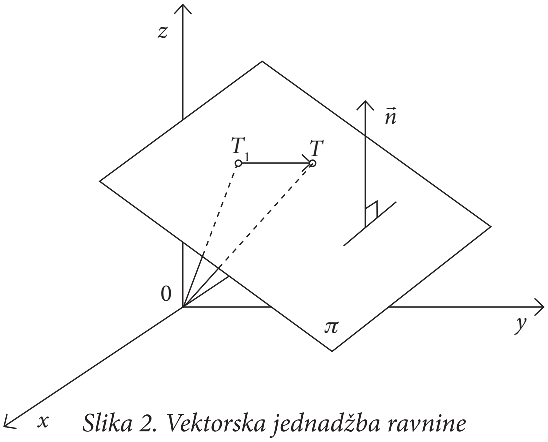
Vektorska jednadžba ravnine — Jednadžba ravnine kroz točku (skalarna jednadžba ravnine)

$$\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$$

Opća jednadžba ravnine — Segmentni oblik jednadžbe ravnine

1.1. Vektorska jednadžba ravnine

Neka je zadana točka T_1 prostora i vektor $\vec{n}$. Odredimo jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom T_1 i okomita je na zadani vektor $\vec{n}$ (Slika 2.).



Slika 2. Vektorska jednadžba ravnine

Neka je točka $T \in \pi$, $T \neq T_1$.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

Gdje leži vektor $\overrightarrow{T_1T}$? U kakvom su odnosu vektori $\vec{n}$ i $\overrightarrow{T_1T}$? Što možemo reći o njihovom skalarnom umnošku? Kako bismo vektor $\overrightarrow{T_1T}$ izrazili preko radij-vektora točaka T_1 i T ?

Tada vektor $\overrightarrow{T_1T}$ leži u ________________, pa je $\vec{n}$ ________________ $\overrightarrow{T_1T}$, te vrijedi da je $\vec{n} \cdot \overrightarrow{T_1T} =$ ________________.

Budući da je $\overrightarrow{T_1T} =$ ________________, to je

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r_1}\right) = 0.$$

To je **vektorska jednadžba** ravnine π. Vektor $\vec{n}$ nazivamo **normala ravnine** π. Vektor $\vec{n}$ okomit je na ravninu π (okomit je na svaki vektor te ravnine).

1.2. Jednadžba ravnine kroz točku (skalarna jednadžba ravnine)

Iz vektorske jednadžbe ravnine dobit ćemo jednadžbu ravnine kroz točku.

Ako u koordinatnom sustavu $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ vrijedi da je $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, a $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, onda iz

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r_1}\right) = 0 \Rightarrow \left(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right) \cdot \left[\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) - (\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right) \cdot [\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}] = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x - x_1\right) + B\left(y - y_1\right) + C\left(z - z_1\right) = 0. \quad (*)$$

Jednadžba (*) naziva se **jednadžba ravnine kroz točku** $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$. Ta se jednadžba naziva i skalarna jednadžba ravnine.

MEMENTO

Čega se ovdje trebalo prisjetiti? Računanja s vektorima u koordinatnom zapisu te oduzimanja i skalarnog množenja vektora. Također, i da je svakoj točki T u prostoru jednoznačno pridružena uređena trojka realnih brojeva (x, y, z) i radij-vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

1.3. Opća jednadžba ravnine

Iz jednadžbe $(*) \Rightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0$. Stavimo da je $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$. Jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

naziva se **opća jednadžba ravnine**.

Primjer 1. Treba odrediti jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom $T(1, 2, -3)$ i normala joj je $\vec{n} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

$$-1(x - 1) + 4(y - 2) + 5\,(z + 3) = 0$$
$$\pi \ldots -x + 4y + 5z + 8 = 0$$

1.4. Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine π. Ako je $D = 0$, ravnina prolazi ishodištem. (*Obrazložiti!*)[4]

Ako je $D \neq 0$, gornju jednadžbu možemo podijeliti s $-D$ pa dobivamo

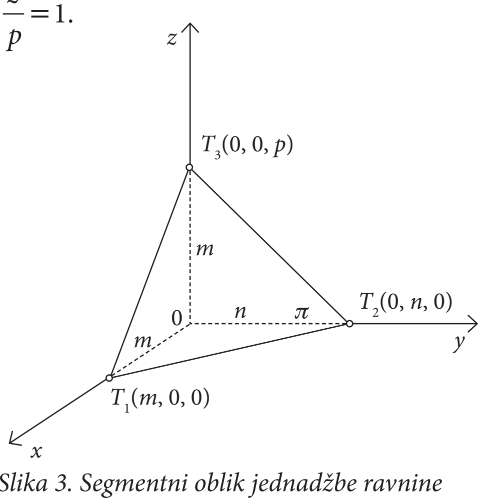
$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Uvođenjem oznaka m, n, p jednadžba ravnine poprima oblik

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Ovaj se oblik jednadžbe naziva **segmentni oblik jednadžbe ravnine**. (*Što smo označili sa m, n i p?*)[5]

Brojevi m, n, p odsječci su ravnine π na koordinatnim osima x, y, z redom, tj. ravnina prolazi točkama $T_1(m, 0, 0)$, $T_2(0, n, 0)$, $T_3(0, 0, p)$ na koordinatnim osima (Slika 3.).



Slika 3. Segmentni oblik jednadžbe ravnine

[4] Za provjeru vidjeti dio 6. Rješenja.

[5] Za provjeru vidjeti dio 6. Rješenja.

Napomenimo još jednom da za ravninu koja prolazi ishodištem segmentni oblik ravnine ne postoji.

Primjer 2. Ravninu zadanu jednadžbom $-15x-5y+3z+15=0$ treba napisati u segmentnom obliku.

$$-15x-5y+3z=-15\ /:(-15)$$

$$x+\frac{y}{3}-\frac{z}{5}=1$$

Odsječci ravnine na koordinatnim osima su: $m = 1$, $n = 3$, $p = -5$.

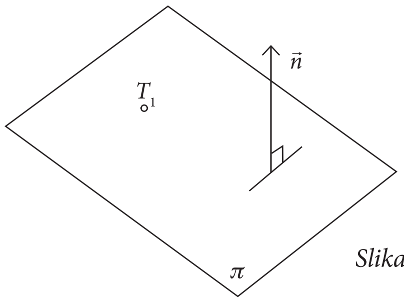
Istaknimo da npr. jednadžbe $-15x-5y+3z+15=0$ *i* $x+\frac{y}{3}-\frac{z}{5}-1=0$ *predstavljaju istu ravninu. Sve jednadžbe koje se mogu dobiti iz jednadžbe ravnine njenim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu.*

2. Zadavanje ravnine

Ravnina u prostoru može se, osim točkom i vektorom normale, jednoznačno odrediti i na druge načine, što se u konačnici može svesti na zadavanje točkom i normalom. U ovom ćemo dijelu razmatrati dva takva načina zadavanja ravnine.

2.1. Zadavanje ravnine točkom i normalom

U prvome poglavlju vidjeli smo da ravninu možemo zadati jednom točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$ *i vektorom normale* $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ *(Slika 4.).*



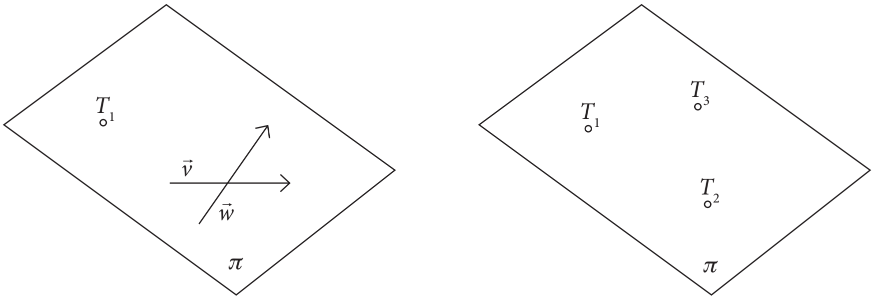
Slika 4. Zadavanje ravnine točke i normalom

Promotrimo sada druga dva načina zadavanja ravnine koja se svode na ovaj.

2.2. Neki drugi načini zadavanja ravnine

- Neka je zadana točka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ prostora i dva nekolinearna vektora $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$, $\vec{w}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$.

Odredimo jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom T_1 i paralelna je s vektorima $\vec{v}, \vec{w}$ (Slika 5. lijevo).



Slika 5. Dva načina zadavanja ravnine

Označimo s $\vec{n}$ vektor normale tražene ravnine π.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

U kakvom su odnosu vektori $\vec{n}$ i $\vec{v}$, odnosno $\vec{n}$ i $\vec{w}$? Kako je položen vektor $\vec{v}\times\vec{w}$ prema vektorima $\vec{v}$ i $\vec{w}$? Što onda možemo reći o međusobnom odnosu vektora $\vec{n}$ i $\vec{v}\times\vec{w}$? Kako je položen vektor $\vec{v}\times\vec{w}$ u odnosu na ravninu π?

S obzirom na to da je ravnina π paralelna s vektorima $\vec{v}$ i $\vec{w}$, to je normala $\vec{n}$ ________________ $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Budući da je vektorski umnožak $\vec{v}\times\vec{w}$ ________________ $\vec{v}$ i $\vec{w}$, to znači da su vekor $\vec{v}\times\vec{w}$ i vektor normale $\vec{n}$ ________________.

Vektor kolinearan s normalom ravnine ________________ ravninu te je također normala iste ravnine. Stoga možemo uzeti da je $\vec{n}=$ ________________.

Dobivamo da je

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k},$$

gdje je $A=$ ________________________________,

$B=$ ________________________________,

$C=$ ________________________________.

Tako smo dobili vektor normale $\vec{n}$ i problem sveli na zadavanje ravnine točkom i normalom. Dakle, ravnina je jednoznačno određena točkom T_1 i s dva njoj paralelna (nekolinearna) vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

- Neka su zadane $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_2,y_2,z_2)$, $T_3(x_3,y_3,z_3)$ tri nekolinearne točke prostora.

  Odredimo jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama T_1,T_2,T_3 (Slika 5. desno).

Promatrajmo npr. vektore $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$. Kao što smo u prethodnom problemu pomoću nekolinearnih vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ koji su paralelni traženoj ravnini dobili vektor normale $\vec{n}$, tako ćemo i ovdje pomoću nekolinearnih vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$, koji leže u traženoj ravnini, odrediti vektor normale $\vec{n}$. Budući da je vektor $\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$ okomit na traženu ravninu, možemo uzeti da je $\vec{n} = \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$.

Odabirom jedne od zadanih točaka (T_1 ili T_2 ili T_3) ovaj problem najzad svodimo na zadavanje ravnine točkom i normalom.

Problem određivanja jednadžbe ravnine trima nekolinearnim točkama mogli smo sagledati i ovako.

Neka je točka $T(x, y, z) \in \pi$, $T \neq T_1, T_2, T_3$. Skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{T_1T}$ i vektora $\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$ mora iščezavati budući da su vektori $\overrightarrow{T_1T}$ i $\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$

________________.

Dakle, $\overrightarrow{T_1T} \cdot \left(\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}\right) =$ ________________.

To možemo zapisati pomoću ________________:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ova se jednadžba naziva **jednadžba ravnine kroz tri točke**.

MEMENTO

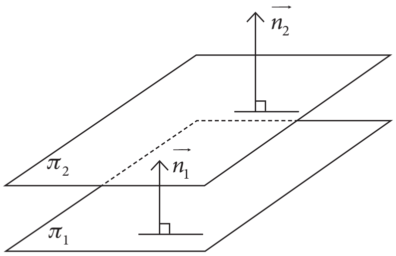
Uočite da vektori $\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}$ leže u istoj ravnini i prisjetite se da je mješoviti umnožak komplanarnih vektora jednak nula.

Primjer 3. Treba odrediti jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $T_1(1, 0, 0)$, $T_2(0, 3, 0)$, $T_3(0, 0, -5)$.

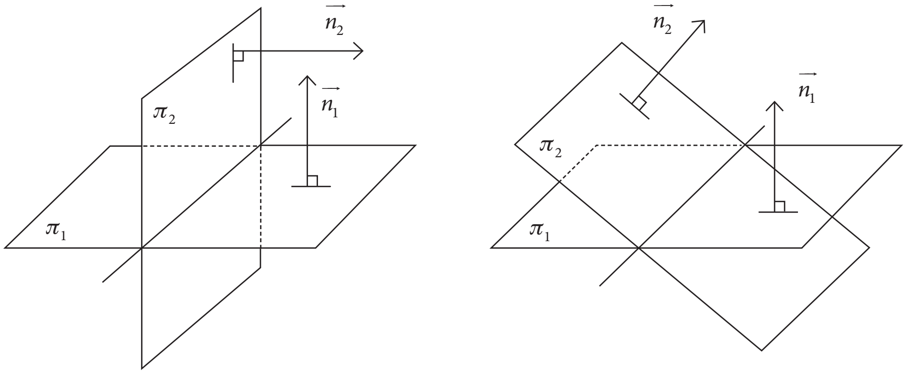
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 3-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & -5-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \ldots -15x - 5y + 3z + 15 = 0$$

3. Odnos dviju ravnina

Dvije ravnine u prostoru mogu biti ili paralelne ili je njihov presjek pravac (Slike 6. i 7.). Pritom paralelnost uključuje slučaj kad se ravnine podudaraju.



Slika 6. Ravnine su paralelne



Slika 7. Ravnine se sijeku

3.1. Paralelne ravnine

Ravnine π_1 i π_2 su **paralelne** (Slika 6.) ako su im vektori normala $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ ________________, tj. ako vrijedi

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ako je $\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, onda je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.(Pokazati!)$$ [6]

Ako su **ravnine jednake** (vidjeti istaknuto, primjer 2.), tj. preklapaju se, vrijedi da je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

3.2. Kut između ravnina

- **Ravnine** π_1 i π_2 su **okomite** (Slika 7. lijevo) ako su im vektori normala $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ ________________, tj. ako vrijedi

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$

[6] Za provjeru vidjeti dio 6. Rješenja.

Ako je $\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, onda je ________________.

- Općenito, **kut između ravnina** π_1 i π_2 (Slika 7. desno) jednak je kutu između pripadajućih vektora normala $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$, tj.

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

(*Kojeg se izraza ovdje trebalo prisjetiti?*)[7]

Ako je $\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, onda je

$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) =$ ________________________________.

4. Formule

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$	Jednadžba ravnine kroz točku
$Ax+By+Cz+D=0$	Opća jednadžba ravnine
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$	Segmentni oblik jednadžbe ravnine
$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	Jednadžba ravnine kroz tri točke
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	Uvjet paralelnosti ravnina
$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$	Uvjet okomitosti ravnina
$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	Kut između ravnina

5. Zadatci za vježbu

Zadatak 1. Treba napisati jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M(2,3,5)$ i okomita je na vektor $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Zadatak 2. Treba napisati jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom $M(1,-1,3)$ i paralelna je s ravninom $\pi_1 \ldots 3x + y + z - 7 = 0$.

[7]Za provjeru vidjeti dio 6. Rješenja.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

Kako glasi vektor normale $\overrightarrow{n_1}$ ravnine π_1?

U kakvom su odnosu tražena ravnina π i vektor $\overrightarrow{n_1}$?

Na koji se problem svodi ovaj zadatak?

Zadatak 3. Treba odrediti jednadžbu ravnine π koja je paralelna s ravninom *xy* i prolazi točkom $T(2, 5, 8)$.

PITANJE ZA PROMIŠLJANJE

Kako glasi jednadžba ravnine xy? Zašto? Treba napisati jednadžbu normale $\overrightarrow{n_1}$ te ravnine.

U kakvom su odnosu tražena ravnina π i vektor $\overrightarrow{n_1}$?

Na koji se problem svodi svoj zadatak?

Zadatak 4. Treba napisati jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(5, 4, 3)$, a odsijeca jednake segmente na koordinatnim osima.

Koristit ćemo ________________ oblik jednadžbe ravnine $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1.$

Budući da točka $A(5, 4, 3)$ ________________ *u ravnini njezine* ________________ *moraju* ________________ *jednadžbu ravnine, a jer je* ________________*, to imamo*

$$\frac{5}{m}+\frac{4}{m}+\frac{3}{m}=1.$$

Odavde je $m =$ ______*, pa je jednadžba tražene ravnine* ________________.

Zadatak 5. Treba odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(2, -1, 3)$ te sadrži ishodište i točku $A(1, 1, 1)$.

Zadatak 6. Treba odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(2, -1, 3)$ te sadrži os *x*.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

Kako bismo drugačije mogli reći: „Ravnina sadrži os x”?

Kako bismo ovaj zadatak mogli svesti na prethodni?

Zadatak 7. Treba odrediti jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom $M(2, -1, 1)$ i okomita je na ravnine

$$\pi_1 \ldots 3x + 2y - z - 4 = 0$$

$$\pi_2 \ldots x + y + z - 3 = 0.$$

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

U kakvom su odnosu vektori $\vec{n}$ i $\overrightarrow{n_1}$, odnosno $\vec{n}$ i $\overrightarrow{n_2}$?

Što možemo reći o međusobnom odnosu vektora i $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$?

Na koji se problem svodi ovaj zadatak?

Napomenimo da je s $\vec{n}$ označen vektor normale tražene ravnine π, s $\overrightarrow{n_1}$ vektor normale ravnine π_1, a s $\overrightarrow{n_2}$ normala ravnine π_2.

Zadatak 8. Treba napisati jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $M_1(2, -1, 4)$ i $M_2(3, 2, -1)$, a okomita je na ravninu $\pi_1 \ldots x + y + 2z - 3 = 0$.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

Gdje leži vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$?

U kakvom su odnosu vektori $\vec{n}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$, odnosno $\vec{n}$ i $\overrightarrow{n_1}$?

Što možemo reći o međusobnom odnosu vektora $\vec{n}$ i vektora $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{n_1}$? Zašto?

Na koji se problem svodi ovaj zadatak?

Zadatak 9. Treba odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_1(2, 3, -1)$, $T_2(-1, 2, 4)$ i paralelna je s osi z.

PITANJA ZA PROMIŠLJANJE

Treba napisati neki vektor koji leži na osi z.

U kakvom je odnosu taj vektor s vektorom normale tražene ravnine?

Na koji se problem svodi ovaj zadatak?

6. Rješenja

OBLICI JEDNADŽBE RAVNINE

Rješenja 1.1: ravnini π; okomit na; 0; $\vec{r} - \overrightarrow{r_1}$

Rješenja 1.2: $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$; $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$

Rješenja 1.4:

- Ako je $D = 0$, jednadžba ravnine glasi: $Ax + By + Cz = 0$. Ravnina prolazi ishodištem $O(0, 0, 0)$ budući da koordinate ishodišta zadovoljavaju jednadžbu ravnine, tj. vrijedi da je $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$.
- Iz $\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$, odakle vidimo da je $m = -\frac{D}{A}$, $n = -\frac{D}{B}$, $p = -\frac{D}{C}$.

ZADAVANJE RAVNINE

Rješenja 2.2:

- okomit na; okomit na; kolinearni; okomit na; $\vec{v} \times \vec{w}$; $A = v_2 w_3 - v_3 w_2$, $B = v_3 w_1 - v_1 w_3$, $C = v_1 w_2 - v_2 w_1$
- okomiti; 0; determinante trećeg reda

ODNOS DVIJU RAVNINA

Rješenja 3.1:

- neka su $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ kolinearni:

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}$$

$$A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} = \lambda\left(A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad \lambda = \frac{A_1}{A_2} \\ A_1 &= \lambda A_2 \\ B_1 &= \lambda B_2 \Rightarrow \lambda = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \\ C_1 &= \lambda C_2 \\ & \qquad\qquad \lambda = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

Rješenja 3.2:

- okomiti; $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
- izraza za skalarni umnožak vektora; $\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

ZADATCI ZA VJEŽBU

Rješenje zadatka 1:

Vektor $\vec{a}$ je normala tražene ravnine budući da je okomit na nju (vidjeti primjer 1.), pa vrijedi: $4(x-2) + 3(y-3) + 2(z-5) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2z - 27 = 0$.

Rješenje zadatka 2:

Zadatak se svodi na problem određivanja jednadžbe ravnine točkom i normalom (zadatak 1.), pa je $3(x-1) + 1(y+1) + 1(z-1) = 0 \Rightarrow 3x + y + z - 3 = 0$.

Rješenje zadatka 3:

Jednadžba ravnine xy je $z = 0$ budući da sve točke te ravnine imaju koordinatu z (aplikatu) jednaku 0. Odatle se vidi da je $\vec{n_1} = \vec{k}$. Ovaj se zadatak također svodi na zadatak 1. pa imamo da je $1(z-8)=0 \Rightarrow z=8$.

Sve točke tražene ravnine π imaju aplikatu jednaku 8.

Rješenje zadatka 4:

- segmentni; leži; koordinate; zadovoljavati; $m = n = p$; 12; $\frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=1$

Rješenje zadatka 5:

Jednadžba ravnine je: $-4x+y+3z=0$ (vidjeti primjer 3.).

Rješenje zadatka 6:

Budući da os x leži u ravnini, odabirom dviju točaka na osi x, npr. ishodišta i točke (1, 0, 0), zadatak svodimo na prethodni. Jednadžba tražene ravnine je: $3y+z=0$.

Rješenje zadatka 7:

Tražena ravnina π paralelna je s vektorima $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$ pa se zadatak svodi na problem određivanja jednadžbe ravnine točkom i s dva njoj paralelna (nekolinearna) vektora (vidjeti dio 2.2. Neki drugi načini zadavanja ravnine).

Jednadžba ravnine je: $3(x-2)-4(y+1)+(z-1)=0 \Rightarrow 3x-4y+z-11=0.$

Rješenje zadatka 8:

Za vektor normale možemo uzeti vektor $\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n_1}$. Odabirom jedne od zadanih točaka, primjerice točke M_1, i uvrštavanjem u jednadžbu ravnine kroz točku dobivamo $11(x-2)-7(y+1)-2(z-4)=0 \Rightarrow 11x-7y-2z-21=0$. Dakle, zadatak smo sveli na problem određivanje ravnine točkom i normalom.

Rješenje zadatka 9:

Vektor $\vec{k}$ leži na osi z, a jer je tražena ravnina paralelna osi z, vektori $\vec{n}$ i $\vec{k}$ su okomiti (baš kao $\vec{n}$ i $\vec{n_1}$ u prethodnom zadatku). Vidimo da se ovaj zadatak svodi na prethodni.

Jednadžba tražene ravnine je: $-(x-2)+3(y-3)=0 \Rightarrow -x+3y-7=0.$

Literatura

1. M. Bocher, *Plane Analytic Geometry: With Introductory Chapters on the Differential Calculus*, Hanry Holt and Company, New York, 1905.
2. P. Corn, I. Kuzmanović, *Razni načini zadavanja ravnine u prostoru*, Osječki matematički list, *12* (1), 21-28, 2012. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/87338
3. B. Gotovac, *Matematika 1*, Kemijsko-tehnološki fakultet u Splitu, Split, 2015.
4. P. Pirklova, D. Bímová, *Repetition of analytic geometry in the plane for students of mechanical engineering*, AIP Conference Proceedings 2333, 050002, 2021. Published Online: 08 March 2021. Preuzeto sa: https://doi.org/10.1063/5.0042817