

Ban Mažuranić i matematika

IVICA VUKOVIĆ¹

Povijest pamti matematičare koji su se okušali u političkim i državnim poslovima. Primjerice, Laplace je jedno vrijeme bio Napoleonov ministar, Newton je obnašao dužnost ravnatelja kraljevske kovnice novca, Leibniz se pokazao vještim diplomatom, a Penleve je postao čak i predsjednikom francuske Vlade. Poznato je kako je i naš Ruđer Bošković bio u diplomatskim misijama. Možda su ipak zanimljiviji oni drugi, državnici koji su se iz osobnog zadovoljstva znali baviti prirodnim znanostima i matematikom. Alfons X., kralj Kastilije, noći je provodio proučavajući zamršena Ptolomejeva astronomska djela, što mu je priskrbilo naslov *Mudri* (u vremenu kad se kraljeve znalo počastiti pogrđnim nadimcima kao *Ludi* ili *Glupi*), a posebno je poznata Napoleonova sklonost matematici i naklonost prema matematičarima. I Hrvati imaju sličnih primjera. Ban Jelačić, prema svjedočenju svoga prijatelja i biografa Neustädtera, volio je spomenuti kako je *sa šesnaest godina položio ispit iz više matematike na terezijanskoj akademiji u Beču, lijep je to zadatak i za tridesetogodišnjega čovjeka*[1]. Ipak, nedvojbeno je najpoznatiji primjer astronoma i matematičara amatera među hrvatskim državicima ban Ivan Mažuranić.

Pjesnik i državnik, *ban pučanin*, Ivan Mažuranić pripada među najznamenitije osobe hrvatske povijesti. Kao pjesnik, još je za života slavljem i istodobno od političkih protivnika osporavan. Pravaš Ante Kovačić čak je napisao parodiju na Mažuranićev slavni ep nazvavši ga *Smrt babe Čengičkinje*. Kao ban, u razmjerno kratkom vremenu pokazao je državničku mudrost uočavajući bitne potrebe hrvatskog društva i svu organizacijsku darovitost da svoje nakane i ostvari. Zahvalno potomstvo pamti ga kao energičnog promicatelja obveznog obrazovanja, bana za čijeg je mandata uspostavljeno suvremeno sveučilište, formirano neovisno sudstvo i stvorena moderna državna uprava. Ukratko, držimo ga čovjekom koji je bitno unaprijedio hrvatsku državu i društvo općenito. Manje se spominje da se Mažuranić, posebno krajem života, bavio astronomijom i matematikom. Ipak, suvremenici su znali za ovu banovu sklonost. Primjerice, Matoš spominje kako se *naš Mažuranić bavi u veće svog života astronomijom, jer u harmoniji zvijezda i integralnog računa osjećaše univerzalna mu duša neslućene estetičke dojmove*.²

¹Ivica Vuković, Tehničko veleučilište u Zagrebu

²A. G. Matoš, Slikarstvo na prošlogodišnjoj izložbi, Nada, VII, br.1, str. 7–8; br. 2, str. 20–22; Sarajevo, 1. i 15. I. 1901. (Sabrana djela Antuna Gustava Matoša, sv. III., str. 250, Zagreb 1973.)

Mažuranićeve matematičke bilješke čuvaju se u Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu. Riječ je o većem broju listova, poprilično nesređenih, iz kojih se ipak može nazrijeti koja je matematička znanja *ban pučanin* dosegnuo. Osim toga, često se iz rukopisne ostavštine mogu otkriti i navike pa i poneke osobine onoga koji ih je pisao.

Mažuranićeve bilješke pisane su i na papirićima koji bi mu se našli pri ruci, ali i na listovima većeg formata sve do 45.5 cm × 37.5 cm, najčešće presavijenima u arak, na kojima bi često pisao samo s vanjske strane, ponekad ih okrećući, tako da je pisano u različitim smjerovima. Često je za svoje račune koristio službene, kaligrafski pisane obavijesti o vremenu zakazanih saborskih sjednica, ili sjednica zastupničkog kluba, ili pak odbora za proračun koja su mu kao banu dostavljana. Stječe se dojam da je računao na onome što bi mu se trenutno našlo pod rukom. Tako ima računanja čak i na kuvertama službene pošte (die k.k. Staatsanwaltschaft zu Agram) ili čak samih dopisa (Interpallatió, o Lonjskom polju, pisanom na mađarskom, potpisanom od Dr. Miletics Szvetozař, Pesten, 1870 martius ho 31-éu). Kad mu je pri ruci, piše čak i na nekom kartončiću. Kao da nema strpljenja potražiti prikladniji papir ili se pak boji da će smetnuti s uma ono što toga trenutaka želi računski provjeriti. Kad mu pak crtež elipse ne stane na jedan list, on drugi priljepljuje voskom za pečaćenje.

Iz nadnevaka spomenutih pisama i saborskih sjednica vidi se da je Mažuranić svoje bilješke pisao i prije i za vrijeme svoga banovanja, a ne samo *u veće svog života*. Ima i listova s nadnevcima iz 1855. godine.

Iz ovih se bilježaka uočava Mažuranićeva vještina i nevjerojatna strpljivost u računanju aritmetičkih i algebarskih izraza. Primjerice, računa kvadratni korijen iz broja koji zapisuje 345,37,56,31,91,10. Zarezom odvaja po dvije decimale iza desetinskoga znaka jer koristi postupak koji danas, u vrijeme džepnih računala, ni jedan srednjoškolac više ne zna. Tim mukotrpnim algoritmom dobiva rezultat sa sedam točnih decimalnih mjesta, a inače računa velikom točnošću s brojevima na osam decimalnih mjesta.

Dulje izraze ne zapisuje u skraćenom obliku. Primjerice, zapisuje sve potencije broja 2 od 2^0 do 2^{20} ; izraz $\sqrt{2 - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2}}$ zapisuje s čak 16 znakova korijena, a u razlomku $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 59}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 60}$, gotovo skribomanski, piše baš sve faktore. U bilješkama je mnoštvo izraza s logaritmiranjem. Sigurno se koristio logaritamskim tablicama, možda čak onima koje je priredio matematičar i astronom Senjanin Ivan Paskvić [2], ili Veginim³, koje se bile u širokoj uporabi i k tomu vrlo precizne, što je Mažuraniću očito bilo važno.

Među mnoštvom računa nalaze se i poneki zapisi troškova (mlijeko, meso, jaja, pilići) ili jednostavno tablice nekih izdataka (Johan 12, Imbro 15...). Nejasan je zapis November 881 Penzija 500 for. Ima tu i tablica deklinacija, čak i kalendar za mjesec travanj 1873. Vazam (Uskrs) je te godine pao na 13. travnja.

³Jurij Vega(1754. – 1802.), austrougarski barun, topnički časnik i matematičar slovenskog podrijetla

Osnovna je teškoća u odgonetavanju svrhe svih ovih računa u tomu što nema nikakvog popratnog teksta ni sugestivnih oznaka za ono što računa. To je velika šteta jer bi bilo zanimljivo znati koje je termine Mažuranić koristio, s obzirom na to da su uvrijeme nastanka ovih bilježaka Šulek⁴ i Golub⁵ promicali uporabu hrvatskoga znanstvenog nazivlja. Mažuranić rijetko koristi crteže. Prostoručnih skica gotovo da i nema, a one geometrijske crtane su pomoću geometrijskog pribora vrlo tankim crtama.

Mažuranićev način pisanja i matematičke oznake u skladu su s tadašnjim običajem. Decimalni znak je podignuta točka, dekadski logaritam označuje lg, tangens piše tg, ali i tang. Ostale trigonometrijske funkcije označuje na uobičajen način: sin, cos, sec i cosec.

Kvadratne jednadžbe nikada ne računa uvrštavanjem koeficijenata u formulu za rješenja, već je razlaže na puni kvadrat, a tako postupa i s bikvadratnom jednadžbom. Osim kvadratne, često rješava i kubne jednadžbe te algebarske jednadžbe četvrtoga stupnja. Jednadžbu $u^3 - 5u^2 + 3u + 5 = 0$ postupno rješava uporabom Cardanovih formula. Uz jednadžbu zapisanu $Kat^3 - 2Kat^2 + 2Kat = 2$ dopisuje $Kat = malo manja od 1.55$.

Kad računa s trigonometrijskim funkcijama, često izostavi argument: piše $\sin = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos = \frac{1}{3}$.

Mažuranić je poznavao i binarni brojevni sustav. Primjerice, umnožak $9 \cdot 13$ računao je u binarnome zapisu.

Među bilješkama ima i dosta geometrijskih zadaća. Na jednom se listu nalazi crtež konveksnog i nekonveksnog četverokuta s označenim polovištima stranica. Ta polovišta, naravno, čine vrhove paralelograma. Među tim bilješkama je i rukom crtana skica egipatskog pravokutnog trokuta: katete su podijeljene na tri odnosno četiri dijela, a hipotenuza na pet dijelova.

Jedan jedini papir s popratnim tekstom odnosi se na rješavanje trokuta zadanog duljinama stranica. Vrijedi navesti Mažuranićev izvorni tekst.

Ako je c najmanja stranica trokuta; a i b stranice srednja i najveća; r radius kruga idućega kroz sva tri tiemena: tad je

$$r = \frac{abc}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}.$$

U svakom trokutu, dèržeć znamenja kako gorie, a smatrajuć za temelj stranicu a , jest

$$v = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2a}.$$

⁴Bogoslav Šulek (1816. – 1895.), hrvatski polihistor, jezikoslovac i prirodoslovac slovačkog podrijetla

⁵Vjekoslav Milutin Golub (1819. – 1891.), pedagog, profesor i zemaljski školski nadzornik, autor rasprave Naše računstveno nazivlje i uzgredni pabirci

Mažuranić analogno piše odgovarajuće izraze za duljinu visine na stranicu b i c , i na kraju navodi izraz za ploštinu trokuta:

$$\text{Gumno } g \text{ svakog trokuta je } g = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4}.$$

Bila mu je, dakle, poznata i Heronova formula. Kasnije primjenjuje ove formule na trokut $a = 60$, $b = 45$ i $c = 30$, pri čemu sve računске operacije pomno pismeno provodi.

Zanimljiv je primjer u kojemu računa obujam kugala polumjera $r = \frac{1}{2} m$, $r = 1 m$, ..., $r = 6 m$. Ovdje Mažuranić neuobičajeno griješi u računu – kao da koristi različite aproksimacije broja π . Mjernu jedinicu metar zapisuje i na francuskom izvorniku *mètre* i kao podignuto slovo m .⁶

Čni se da je broj π naročito intrigirao Mažuranića. Na više mjesta navodi različite aproksimacije (Mažuranić nigdje ne koristi znak za približnu jednakost i kod aproksimacija piše znak jednakosti):

$$\pi = 2^{1651496}$$

$$\pi = \frac{2\sqrt{3} + 6}{3} = 3.1547005$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11} \pi$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2$$

Među Mažuranićevim spisima nema onih s integralnim računom što ga onako poetično spominje Matoš, ali ima primjera diferenciranja složenih funkcija. Pri tomu se Mažuranić ne koristi mehaničkom primjenom pravila deriviranja umnoška ili kvocijenta. Primjerice, derivaciju funkcije

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

određuje tako da funkciju zapiše u implicitnom obliku $y^2 + y^2x = x^2 - x^3$, a zatim diferencira obje strane izraza i derivaciju dobiva kao kvocijent diferencijala.

Elementarnošću sadržaja jedan list bilježaka odudara od ostalih. Na tom su listu oznake četiriju osnovnih aritmetičkih operacija $+$, $-$, \times i $:$: te njihovi nazivi na latinskom i hrvatskom jeziku, kao i znak jednakosti i korijena. Tu su još i sljedeći zapisi:

⁶Upravo u vrijeme Mažuranićeva banovanja potpisan je godine 1875. Međunarodni sporazum o metru. Potpisom austro-ugarskog veleposlanika u Parizu, grofa Apponya, tom je sporazumu pristupila i Hrvatska, kao dio Austro-Ugarske monarhije. Hrvatski je sabor 1876., za Mažuranićeva banovanja, uplatio vlastiti financijski prilog izgradnji velebnog zdanja u Sevresu kako bi simbolički potvrdio državno-pravni individualitet Hrvatske.

$$\frac{2}{3} = 2:3, \quad 6 < 8, \quad 4 < 10, \quad 4 < 2 \times 5, \quad 3 \times 6 > 3 \times 5,$$

$$4 \times 5 = 2 \times 10 = 1 \times 20 = 20, \quad 8 = 2 \times 4 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2.$$

Voljeli bismo vjerovati da je Mažuranić u dokolici malo poučavao nekoga od svoje mnogobrojne unučadi, možda i najpoznatiju od njih – svoju unuku. Doduše, prema navadi nebacanja bilježaka, na tom je istom listu pribilježio i račune s trigonometrijskim funkcijama.

Često ljudi bez sustavnije matematičke naobrazbe, a skloni onomu što se danas naziva rekreativnom matematikom, eksperimentiraju s aritmetičkim svojstvima prirodnih brojeva. Toga kod Mažuranića nema. Doduše, na jednom mjestu navodi $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$ pa ponešto eksperimentira s ovim svojstvom aritmetičke progresije. Također su mu poznati izrazi za konačne sume kvadrata prirodnih brojeva, te kvadrata parnih i neparnih brojeva. Na jednom se mjestu uočava da za njih koristi stare hrvatske nazive: *taki* i *lihi* brojevi.

Mažuranić nije bio školovani matematičar, ali ni samouk glede matematike i astronomije, nego je stekao tadašnje visokoškolsko obrazovanje iz filozofije, što je uključivalo i te znanstvene discipline. Na zagrebačkoj Kraljevskoj akademiji stekao je solidne temelje u poznavanju matematike i fizike, koje je nadopunio i proširio na studiju u Subotištu (Szombathely) u Mađarskoj [3]. Ono što je učio tijekom svoga školovanja dobro je upamtio i razumijevao te znao primijeniti u konkretnim zadacima. Moglo bi se reći kako mu matematički zadatci s današnje državne mature ne bi predstavljali nikakav problem.

Ostaje nadati se kako će jednom netko sustavnije proučiti mnoštvo sitnim rukopisom pisanih listova na kojima nisu usputne bilješke već sustavno i dugotrajno provedeni računi koji su vjerojatno bili povezani s Mažuranićevim astronomskim interesom. O Mažuranićevom bavljenju astronomijom do sada je pisala Tatjana Kren, a nadamo se da će i njegovo bavljenje matematikom biti više istraženo. Ban je to svakako zaslužio.

Literatura

1. J. Horvat, *Politička povijest Hrvatske* 1, Zagreb, 1936. (pretisak 1989.)
2. I. Vuković, A. Valent, *Dva matematička priručnika Ivana Paskvića*, *Prirodoslovlje*, 18 (1-2), 59-72, 2018.
3. T. Kren, *Izgled neba nad Stolcem i bavljenje astronomijom Ivana Mažuranića*, *Prirodoslovlje*, 15 (1-2), 25-56, 2015.