UDK 512.25:519
Originalni znanstveni članak

ODREĐIVANJE PARAMETARA LINEARNE ZAVISNOSTI*

Ivan MOLNAR — Novi Sad **

SAŽETAK: U radu se interpretira određivanje ekstremnih i najverovatnijih parametara prave kao i mere stepena do koga se veza između mernog skupa tačaka približava linearnoj zavisnosti. Pri određivanjima parametara prave vođenje računa o odnosu težina je izlišno. Otuda se obrada podataka, izuzev slučaja uopšteno promenljivih težina, može realizovati (i realizuje se) zadovoljavanjem uslova $v^Tv = min$. Daje se kritički osvrt na homogenizacijom težina određene najverovatnije parametre prave. Takva obrada podataka, zasnovana na zadovoljavanju uslova $v^TPv = min.$, utiče na promenu definitivnih rezultata, ali ne obezbeđuje najverodostojnije vrednosti nepoznatih.

1. UVODNE NAPOMENE

Rešenje jednog geodinamičkog zadatka zahtevalo je da se odrede parametri linearne zavisnosti (u daljem tekstu: izravnate prave). U tom zadatku apscise i ordinate su označavale merene rezultate različitih karakteristika (jedna osa predstavljala je odstojanja, a druga ubrzanja). Pretpostavlja se da su sva apscisna merenja međusobno jednakih težina ($p_{ap} = p_x$), isto tako i ordinatna merenja ($p_{or} = p_y$), ali se brojne vrednosti tih težina međusobno razlikuju. Takav zadatak određivanja parametara izravnate prave, naravno, identičan je onom pri kome su apscise i ordinate istorodne veličine (istovetnih dimenzija), npr. odstojanja.

Ukoliko bi pojedina apscisna, odnosno ordinatna merenja bila međusobno različitih težina, tada bi određivanje parametara izravnate prave trebalo ostvariti primenom metode najmanjih kavadrata, uopštenom matematičkom obradom podataka merenja.

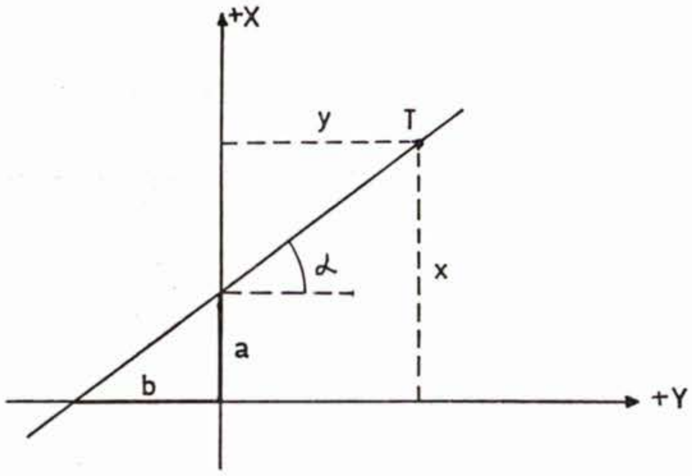
Određivanje parametara izravnate prave ostvaruje se interdisciplinarno, a ne samo u okviru rešavanja geodinamičkih zadataka. Skup tačaka koji podleže obradi podataka, moguće je tretirati na više načina. U tehnici ih shvatamo kao merene rezultate apscisa i ordinata, dok npr. u statistici, medicini, sociologiji i sl. mogu označavati i druge podatke različitih svojstava.

---

* Rad pripada naučnoistraživačkoj temi »Varijeteti određivanja prave«, koju finansira SIZ za nauku SAP Vojvodine.

** Adresa autora: Prof. dr. Ivan Molnar, dipl. inž., Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Ul. V. Vlahovića 3.

Imajući u vidu da se odnosi težina merenih apscisa i ordinata mogu uspostaviti na beskrajno mnogo načina, sledstveno tome se i popravke mogu uspostaviti na beskrajno mnogo načina. Međutim, polazeći od jednog te istog oblika jednačine prave — bez obzira na način uspostavljanja odnosa težina merenih rezultata — postupak izravnavanja u svim slučajevima obezbeđuje određivanje parametara jedne i samo jedne izravnate prave. Kako se opšti oblik jednačine prave može napisati na više načina, to se, polazeći od različitih oblika jednačina prave, dobijaju i različite vrednosti parametara izravnate prave.



Sl. 1

Pretpostavljajući koordinatni sistem prikazan na sl. 1 — u kome su a i b odsečci prave, tj. rastojanja od koordinatnog početka do presečnih tačaka prave sa osima x i y, α je ugao koga zaklapa prava sa osom y, a x i y merene koordinate skupa tačaka — parametri izravnate prave u ovom radu određuju se polazeći od sledeća dva međusobno inverzna oblika jednačina prave:

$$x = y \operatorname{tg} \alpha + a \tag{1}$$

$$y = x \operatorname{ctg} \alpha + b \tag{2}$$

Iz literature je poznato da *izravnata prava proizlazi kroz težište skupa tačaka*. Otuda se jednačine (1) i (2) mogu napisati i za težišnu tačku (koordinate težišne tačke imaju indeks nula):

$$a = x_0 - y_0 \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

$$b = y_0 - x_0 \operatorname{ctg} \alpha \tag{4}$$

U nastavku, ilustruje se matematička obrada podataka skupa od pet tačaka, merenih na eksperimentalnom poligonu:

$$(2; 3{,}6), (4; 4{,}2), (6; 4{,}2), (8; 4{,}5), (10; 5{,}0)$$

Kroz ovih pet tačaka treba položiti pravac koji je tim tačkama najudaljeniji i najbliži.

2. ODREĐIVANJE EKSTREMNIH PARAMETARA IZRAVNATE PRAVE

Uvrštavanjem (3) u (1) i (4) u (2), dva međusobno inverzna oblika jednačina prave poprimaju sledeći izgled:

$$x - x_0 = (y - y_0) \operatorname{tg} \alpha$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{ctg} \alpha$$

Uvođenjem smene,

$$\overline{y}_i = y_i - y_0 \quad \text{i} \quad \overline{x}_i = x_i - x_0$$

nastaju posredne jednačine

$$\overline{x}_i - \overline{y}_i \operatorname{tg} \alpha = 0 \tag{5}$$

$$\overline{x}_i \operatorname{ctg} \alpha - \overline{y}_i = 0. \tag{6}$$

Ekstremne jednačine popravaka glase:

$$v_{01i} = \overline{x}_i - \overline{y}_i \operatorname{tg} \alpha_1 \tag{7}$$

$$v_{02i} = \overline{x}_i \operatorname{ctg} \alpha_2 - \overline{y}_i. \tag{8}$$

Najpre se obrazuju sume kvadrata popravaka,

$$v_{01}^T P_{01} v_{01} = P_{01} [\overline{x}\overline{x}] - 2P_{01} [\overline{x}\overline{y}] \operatorname{tg} \alpha_1 + P_{01} [\overline{y}\overline{y}] \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \tag{9}$$

$$v_{02}^T P_{02} v_{02} = P_{02} [\overline{x}\overline{x}] \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 - 2P_{02} [\overline{y}\overline{x}] \operatorname{ctg} \alpha_2 + P_{02} [\overline{y}\overline{y}], \tag{10}$$

koje se diferenciraju po ekstremnim vrednostima ugla α i izjednačuju sa nulom:

$$-2P_{01} [\overline{y}\overline{x}] \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} + 2P_{01} [\overline{y}\overline{y}] \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} = 0 \tag{11}$$

$$-2P_{02}\,[\overline{xx}]\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2 \frac{1}{\sin^2\alpha_2} + 2P_{02}\,[\overline{yx}]\frac{1}{\sin^2\alpha_2} = 0. \tag{12}$$

Odavde se ekstremne vrednosti ugla računaju za bilo koji odnos težina:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{yy}]}; \qquad \alpha_1 = \mathrm{arc\,tg}\frac{[\overline{yx}]}{[\overline{yy}]} \tag{13}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha_2 = \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{xx}]}; \qquad \alpha_2 = \mathrm{arc\,ctg}\frac{[\overline{yx}]}{[\overline{xx}]}. \tag{14}$$

Ekstremne vrednosti odsečaka prave određuju se uvrštavanjem (13) i (14) u (3) i (4),

$$a_1 = x_0 - y_0\frac{[\overline{yx}]}{[\overline{yy}]}; \qquad b_1 = y_0 - x_0\frac{[\overline{yy}]}{[\overline{yx}]} \tag{15}$$

$$a_2 = x_0 - y_0\frac{[\overline{xx}]}{[\overline{xy}]}; \qquad b_2 = y_0 - x_0\frac{[\overline{yx}]}{[\overline{xx}]} \tag{16}$$

dok se vektori ekstremnih popravaka računaju uvrštavanjem (13) u (7) i (14) u (8):

$$\underset{(n,1)}{v_{01}} = \underset{(n,1)}{\bar{x}} - \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{yy}]}\underset{(n,1)}{\bar{y}} \tag{17}$$

$$\underset{(n,1)}{v_{02}} = \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{xx}]}\underset{(n,1)}{\bar{x}} - \underset{(n,1)}{\bar{y}}, \tag{18}$$

odnosno

$$\underset{(n,1)}{v_{01}} = \underset{(n,1)}{v_x} - \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{yy}]}\underset{(n,1)}{v_y} = \frac{1}{[\overline{yy}]}\left([\overline{yy}]\underset{(n,1)}{v_x} - [\overline{yx}]\underset{(n,1)}{v_y}\right) = \underset{(n,2n)}{L^T}\ \underset{(2n,1)}{v_1} \tag{19}$$

$$\underset{(n,1)}{v_{02}} = \frac{[\overline{yx}]}{[\overline{xx}]}\underset{(n,1)}{v_x} - \underset{(n,1)}{v_y} = \frac{1}{[\overline{xx}]}\left([\overline{yx}]\underset{(n,1)}{v_x} - [\overline{xx}]\underset{(n,1)}{v_y}\right) = \underset{(n,2n)}{M^T}\ \underset{(2n,1)}{v_2}. \tag{20}$$

gde su

$$L^T = \frac{1}{[\overline{yy}]}\left\|\begin{array}{cccccccc} [\overline{yy}] & -[\overline{yx}] & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\overline{yy}] & -[\overline{yx}] & \ldots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & [\overline{yy}] & -[\overline{yx}] \end{array}\right\|$$

$$M^T = \frac{1}{[xx]} \left\| \begin{array}{cccccccc} [yx] & -[xx] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [yx] & -[xx] & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & [yx] & -[xx] \end{array} \right\| .$$

Matrice težina popravaka P_{01} i P_{02} određuju se primenom zakona rasprostiranja grešaka,

za $p_x \neq p_y$ za $p_x = p_y = 1$

$$\underset{(n,n)}{P_{01}} = \underset{(n,n)}{(L^T P^{-1} L)^{-1}} = \frac{p_x p_y [yy]^2}{p_y [yy]^2 + p_x [yx]^2} \underset{(n,n)}{E} \qquad \underset{(n,n)}{P_{01}} = \cos^2 \alpha_1 \underset{(n,n)}{E} \tag{21}$$

$$\underset{(n,n)}{P_{02}} = \underset{(n,n)}{(M^T P^{-1} M)^{-1}} = \frac{p_x p_y [xx]^2}{p_y [yx]^2 + p_x [xx]^2} \underset{(n,n)}{E} \qquad \underset{(n,n)}{P_{02}} = \sin^2 \alpha_2 \underset{(n,n)}{E} \tag{22}$$

dok su vektori popravaka merenih rezultata

$$\underset{(2n,1)}{v_1} = \underset{(2n,2n)}{P^{-1}} \underset{(2n,n)}{L} \underset{(n,n)}{(L^T P^{-1} L)^{-1}} \underset{(n,1)}{v_{01}} \tag{23}$$

$$\underset{(2n,1)}{v_2} = \underset{(2n,2n)}{P^{-1}} \underset{(2n,n)}{M} \underset{(n,n)}{(M^T P^{-1} M)^{-1}} \underset{(n,1)}{v_{02}}, \tag{24}$$

odnosno

za $p_x \neq p_y$ za $p_x = p_y = 1$

$$\underset{(n,1)}{v_{1x}} = \frac{p_y [yy]^2}{p_y [yy]^2 + p_x [yx]^2} \underset{(n,1)}{v_{01}} \qquad \underset{(n,1)}{v_{1x}} = \cos^2 \alpha_1 \underset{(n,1)}{v_{01}} \tag{23a}$$

$$\underset{(n,1)}{v_{1y}} = - \frac{p_x [yy] [yx]}{p_y [yy]^2 + p_x [yx]^2} \underset{(n,1)}{v_{01}} \qquad \underset{(n,1)}{v_{1y}} = - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \underset{(n,1)}{v_{01}} \tag{23b}$$

$$\underset{(n,1)}{v_{2x}} = \frac{p_y [xx] [yx]}{p_y [yx]^2 + p_x [xx]^2} \underset{(n,1)}{v_{02}} \qquad \underset{(n,1)}{v_{2x}} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \underset{(n,1)}{v_{02}} \tag{24a}$$

$$\underset{(n,1)}{v_{2y}} = - \frac{p_x [xx]^2}{p_y [yx]^2 + p_x [xx]^2} \underset{(n,1)}{v_{02}} \qquad \underset{(n,1)}{v_{2y}} = - \sin^2 \alpha_2 \underset{(n,1)}{v_{02}}. \tag{24b}$$

Standardi (srednje greške) jedinica težine, koeficijenti težina kao i standardi ekstremnih uglova:

$$\mu_{01} = \sqrt{\frac{v_{01}{}^T P_{01} v_{01}}{S}} = \sqrt{\frac{P_{01}}{S} \frac{[yy][xx] - [yx]^2}{[yy]}} = \sqrt{\frac{v_1{}^T P v_1}{S}} \tag{25}$$

$$\mu_{02} = \sqrt{\frac{v_{02}{}^T P_{02} v_{02}}{S}} = \sqrt{\frac{P_{02}}{S} \frac{[yy][xx] - [yx]^2}{[xx]}} = \sqrt{\frac{v_2{}^T P v_2}{S}} \quad (26)$$

$$Q_{\alpha 1 \alpha 1} = \frac{\cos^4 \alpha_1}{[yy] P_{01}} \quad (27)$$

$$Q_{\alpha 2 \alpha 2} = \frac{\sin^4 \alpha_2}{[xx] P_{02}} \quad (28)$$

$$\mu''_{\alpha_1} = \rho'' \mu_{01} \sqrt{Q_{\alpha 1 \alpha 1}} = \rho'' \sqrt{\frac{P_{01} [v_{01} v_{01}]}{S}} \sqrt{\frac{\cos^4 \alpha_1}{[yy] P_{01}}} = \rho'' \cos^2 \alpha_1 \sqrt{\frac{v_{01} v_{01}}{S [yy]}}$$

$$\mu''_{\alpha_1} = \rho'' \frac{[yy]}{[yy]^2 + [yx]^2} \sqrt{\frac{[yy][xx] - [yx]^2}{S}} \quad (29)$$

$$\mu''_{\alpha_2} = \rho'' \frac{[xx]}{[xx]^2 + [yx]^2} \sqrt{\frac{[yy][xx] - [yx]^2}{S}}. \quad (30)$$

Postupci određivanja ekstremnih parametara sadrže po dve nepoznate, stoga je broj stepeni slobode (suvišnih merenja) S = n—2. *Težina P_{01} odnosno P_{02} podjednako se javlja i u brojitelju i u imenitelju razlomka (29) odnosno (30), što znači da je pretpostavljeni odnos težina apscisa i ordinata bez ikakvog uticaja, kako na ekstremne vrednosti ugla α tako i na njihovu ocenu tačnosti.* Otuda je uzimanje u obzir odnosa težina nepotrebno. Dovoljno je zadovoljiti uslov $v_1{}^T v_1 = v_2{}^T v_2 = v_{01}{}^T v_{01} = v_{02}{}^T v_{02} = \min$.

Pored ekstremnih parametara izravnate prave određuje se i linearna zavisnost merenih veličina. Mera stepena do koga se veza između merenih apscisa i ordinata približava linearnoj zavisnosti izražava se koeficijentom korelacije,

$$r_{yx} = \frac{[yx]}{\sqrt{[yy][xx]}} \qquad (-1 \leq r_{yx} \leq 1) \quad (31)$$

a ugao regresije razlikom između ekstremnih vrednosti ugla α

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{[yy][xx] - [yx]^2}{[yx]([yy] + [xx])}. \quad (32)$$

3. ODREĐIVANJE NAJVEROVATNIJIH PARAMETARA IZRAVNATE PRAVE

3.1. Da bismo, umesto ekstremnih odredili najverovatnije parametre izravnate prave, potrebno je inverzne jednačine (5) i (6) transformisati tako da međusobno korespondiraju. Jednačine (5) se množe sa cosα, a jednačine (6) sa sinα. U oba slučaja dobijaju se izrazi:

$$\overline{x}_i \cos\alpha - \overline{y}_i \sin\alpha = 0. \tag{33}$$

Jednačine popravaka formiraju se na uobičajen način:

$$v_{0i} = \overline{x}_i \cos\alpha - \overline{y}_i \sin\alpha. \tag{34}$$

Obrazuje se suma kvadrata popravaka $v_0^T P_0 v_0$, koja se diferencira po α, izjednačava sa nulom i goniometrijski transformiše

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,[\overline{y}\overline{x}]}{[\overline{y}\overline{y}] - [\overline{x}\overline{x}]}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\,[\overline{y}\overline{x}]}{[\overline{y}\overline{y}] - [\overline{x}\overline{x}]}. \tag{35}$$

Očigledno je da se najverovatnija vrednost ugla α, poput njegovih ekstremnih vrednosti u prethodnom poglavlju, određuje za bilo koji odnos težina.

Uvrstivši (35) u (34), izračunava se vektor popravaka,

$$\underset{(n,1)}{v_0} = \cos\alpha \underset{(n,1)}{\overline{x}} - \sin\alpha \underset{(n,1)}{\overline{y}} \tag{36}$$

dok se matrica težina P_0 određuje primenom zakona rasprostiranja grešaka

za $p_x \neq p_y$ za $p_x = p_y = 1$

$$\underset{(n,n)}{P_0} = \frac{p_x p_y}{p_y \cos^2\alpha + p_x \sin^2\alpha} \underset{(n,n)}{E} \qquad \underset{(n,n)}{P_0} = \underset{(n,n)}{E}. \tag{37}$$

Komponente vektora najverovatnijih popravaka merenja:

za $p_x \neq p_y$ za $p_x = p_y = 1$

$$\underset{(n,1)}{v_x} = \frac{p_y \cos\alpha}{p_y \cos^2\alpha + p_x \sin^2\alpha} \underset{(n,1)}{v_0} \qquad \underset{(n,1)}{v_x} = \cos\alpha \underset{(n,1)}{v_0} \tag{38a}$$

$$\underset{(n,1)}{v_y} = -\frac{p_x \sin\alpha}{p_y \cos^2\alpha + p_x \sin^2\alpha} \underset{(n,1)}{v_0} \qquad \underset{(n,1)}{v_y} = -\sin\alpha \underset{(n,1)}{v_0}. \tag{38b}$$

Kvadrat standarda ugla α:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{1}{S} \frac{[\overline{x}\overline{x}] \cos^2\alpha - 2\,[\overline{y}\overline{x}] \sin\alpha\cos\alpha + [\overline{y}\overline{y}] \sin^2\alpha}{[\overline{x}\overline{x}] \sin^2\alpha + 2\,[\overline{y}\overline{x}] \sin\alpha\cos\alpha + [\overline{y}\overline{y}] \cos^2\alpha}. \tag{39}$$

Brojilac razlomka je suma kvadrata popravaka $v_0^T v_0$, dok je imenilac, apstrahujući oznaku broja stepeni slobode S, težina ugla α (recipročna vrednost koeficijenta težine).

Rešenjem kvadratne jednačine $([\bar{y}\bar{y}] - [\bar{x}\bar{x}])\, tg2\alpha - 2\,[\bar{y}\bar{x}] = 0$, imajući u vidu poznatu goniometrijsku vezu dvojnog ugla $tg2\alpha = 2tg\alpha\,(1 - tg^2\alpha)^{-1}$, mogu se sračunati dve najverovatnije vrednosti ugla α (koje se međusobno razlikuju za 90°). One se podudaraju sa pravcima dveju osa elipse grešaka težišne tačke.

Da vidimo, sada, ilustraciju izloženog postupka. Brojni podaci merenih veličina i njihove redukovane vrednosti date su u tabeli 1. Za polazne podatke dobijene su veličine:

Tabela 1

y	x	$\bar{y}$	$\bar{x}$
+ 2	+3,6	—4	—0,7
+ 4	+4,2	—2	—0,1
+ 6	+4,2	0	—0,1
+ 8	+4,5	+2	+0,2
+10	+5,0	+4	+0,7
$y_0 = +6$	$x_0 = +4,3$	$[\bar{y}] = 0$	$[\bar{x}] = 0$

$$[\bar{y}\bar{y}] = 40 \qquad [\bar{y}\bar{x}] = 6,2 \qquad [\bar{x}\bar{x}] = 1,04$$

Na osnovu (35): $tg2\alpha = 0,318\,2752$

$$2\alpha = 17°39'20'' \qquad \alpha = 8°49'40''$$

$$v_0^T v_0 = 0,07\,711 \qquad \mu_0 = \pm 0,1604 \qquad \mu_\alpha = \pm 1°26'07''.$$

Ekstremne vrednosti ugla α određuju se izrazima (13), (14), (29) i (30):

$$\alpha_1 = 8°48'40'' \pm 1°26'08'' \quad i \quad \alpha_2 = 9°31'20'' \pm 1°32'50''.$$

Najverovatnija vrednost ugla α može se odrediti i neposredno, izravnanjem, polazeći od sledećih jednačina popravaka

$$v_i = (-\bar{y}_i \cos\alpha_0 - \bar{x}_i \sin\alpha_0)\,\Delta\alpha + f_i, \tag{40}$$

gde su

$$f_i = -\bar{y}_i \sin\alpha_0 + \bar{x}_i \cos\alpha_0$$

$$v_i = -\cos\alpha_0\, v_{xi} + \sin\alpha_0\, v_{yi}.$$

Da bismo neposrednim određivanjem ostvarili zadovoljavajuće rezultate, potrebno je raspolagati veoma dobrom privremenom vrednošću α_0. Ukoliko se njome ne raspolaže, rešenja se ostvaruju u više koraka, sukcesivnim ponavljanjem izravnanja.

Ako se određivanja najverovatnijih parametara prave realizuju primenom uslova $v^T{}_0 P_0 v_0 = min.$, odnos težina, takođe, ne utiče na ugao α niti na njegovu ocenu tačnosti. Naime, težina popravaka P_0 figuriše i u brojitelju i u imenitelju razlomka (39), što znači da se njen uticaj potire.

Uvrštavanjem (35) u (3) i (4) određuju se najverovatniji odsečci prave

$$a = x_0 - y_0 \operatorname{tg} \alpha \tag{41}$$

$$b = y_0 - x_0 \operatorname{ctg} \alpha. \tag{42}$$

Parametri izravnate prave određeni izrazima poglavlja 2. i 3.1., a na osnovu podataka datih u tabeli 1, poređani su i stavljeni u međusobnu ravan u tabeli 2. Sve tri izravnate prave prolaze kroz težište skupa tačaka.

Tabela 2

Udaljenost prave od mer. skupa tačaka	α			Odsečci	
	0	I	II	a	b
Minimalna	8	48	40	3,37	—21,74
Maksimalna	9	31	20	3,29	—19,63
Najverovatnija	8	49	40	3,36	—21,69

3.2. U napred izloženim postupcima pokazano je da se popravke v_{01}, v_{02} i v_0 mogu razložiti za bilo koji odnos težina, pa i za slučaj da se apscisna, odnosno ordinatna merenja smatraju lišenim greškama merenja, tj. kada se računaju samo ordinatne popravke ($p_x = \infty$), odnosno samo apscisne popravke ($p_y = \infty$). Međutim, kao što smo videli — pretpostavljeni odnos težina $p_x : p_y$ ne utiče na definitivne rezultate, što znači da je otežinjavanje merenih rezultata suvišno. Otuda proističe da je pri određivanjima parametara izravnate prave potrebno primeniti princip $v^T v = v_0{}^T v_0 = v_1{}^T v_1 = v_{01}{}^T v_{01} = v_2{}^T v_2 = = v_{02}{}^T v_{02} = min.$ Da bi težine, ipak, imale uticaj, izrađena je jedna varijanta određivanja najverovatnijih parametara izravnate prave prikazane u poglavlju 3.1., na način da promena težina prouzrokuje i promenu definitivnih rezultata.

Suština postupka je sledeća: merni rezultati podele se sa odgovarajućim standardom (ordinate sa μ_y a apscise sa μ_x). *Novonastali skup tačaka predstavlja takvu seriju merenja u kojoj svako merenje ima jediničnu težinu.* Pritom se izravnata prava i pripadajuće joj popravke određuju na osnovu izraza izvedenih u poglavlju 3.1. Ove popravke množe se sa odgovarajućim standardom. Tako svedene popravke pribrajaju se merenim koordinatama tačaka. Prava sračunata na osnovu novoodređenih koordinata smatra se izravnatom pravom prvobitnog skupa tačaka. (Svođenje težina merenih rezultata na jedinicu naziva se homogenizacijom, odnosno transformacijom težina.)

Neka je

$$\overline{y}'_i = \frac{\overline{y}_i}{\mu_y} \quad \text{i} \quad \overline{x}'_i = \frac{\overline{x}_i}{\mu_x}. \tag{43}$$

Tada je na osnovu (35):

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha' = \frac{2\,[\overline{y}'\overline{x}']}{[\overline{y}'\overline{y}'] - [\overline{x}'\overline{x}']}; \quad \alpha' = \frac{1}{2}\, \mathrm{arc\,tg} \frac{2\,[\overline{y}'\overline{x}']}{[\overline{y}'\overline{y}'] - [\overline{x}'\overline{x}']}. \tag{44}$$

Odavde se izračunava vrednost ugla α', zatim se tg α' množi sa proizvodom dvaju standarda $d = \mu_x \mu_y$. Tako dobijena vrednost označava traženi koeficijent pravca izravnate prave.

Ilustraciju ovog postupka na brojnom primeru ostvarujemo tako što npr. usvajamo da su $\mu_y = 1$ i $\mu_x = 0{,}01$. Tada je

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha' = -0{,}119\,6911 \qquad 2\alpha' = 173^\circ 10' 28'', 848$$

$$\alpha' = 86^\circ 35' 14'', 424 \qquad \mathrm{tg}\, \alpha' = 16{,}7693$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}01\ \mathrm{tg}\, \alpha' = 0{,}167\,693 \qquad \alpha = 9^\circ 31' 10''.$$

Prvobitnom skupu tačaka pridružena vrednost $v^T P v$ jednaka je novonastalom skupu tačaka pripadajućoj sumi kvadrata popravaka $v'^T_0 v'_0 = v'^T v'$. Suma kvadrata popravaka i standard jedinice težine u našem primeru iznose

$$v^T P v = 3{,}02\,768 \qquad \mu_0 = 1{,}0046.$$

U odnosu na postupak kojim se homogenizacijom težina merenja utiče na vrednost definitivnih rezultata, tokom istraživanja su se nametnula sledeća promišljanja:

— Postupkom 3.2., uopšte uzev, zadovoljava se uslov $v^T P v = \min.$ i, nasuprot tome, odbacuje primena principa $v_0^T v_0 = \min.$ (Ukoliko se mereni rezultati otežinjuju shodno zakonu rasprostiranja grešaka, tada se u brojnom primeru, kao što to pokazuje tabela 4, uočava i takav odnos težina pri kome se najmanja vrednost sume kvadrata popravaka ne dobija primenom postupka 3.2., nego postupkom 3.1.) Odbacivanje principa $v_0^T v_0 = \min.$ nije razložno jer svaku novonastalu tačku podjednako određuje jedna apscisa sa istovetnim standardom μ_x i jedna ordinata sa istovetnim standardom μ_y; otuda je rang svih novonastalih tačaka koji proističe iz težina jednak. Šta je onda uzrok da se izravnata prava, određena primenom uslova $v_0^T v_0 = \min.$, između tačaka istog ranga, od pojedinih tačaka udaljava a drugim tačkam približava. Naime, bilo kako da usvojimo odnos težina, njihov uticaj izražen obostranim dejstvom svih apscisa i ordinata na novonastale merene rezultate je identičan, što znači da težine svih novonastalih merenih rezultata međusobno uvek ostaju iste. A u takvom slučaju određivanja parametara prave mogu se ostvariti (i ostvaruju se) kao da je svaka popravka v_{0i} jedinične težine.

— Postupak 3.2. ne pruža mogućnost da se standard ugla α neposredno odredi. Posredno se sračunava putem standarda μ_{α}', koji se određuje na osnovu transformacijom težina preračunatog skupa tačaka prema (39), s time što se težine merenih rezultata na napred opisani način svode na jediničnu težinu. Nakon toga se, imajući u vidu pravila rasprostiranja grešaka, sledi modalitet prelaska sa α' na α: najpre se sračuna tgα' i izmnoži sa proizvodom dvaju standarda d; tako se dobija vrednost tgα, odnosno α. Saobrazno tome određuje se i standard ugla α

$$\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha'} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha'} d. \tag{45}$$

Na osnovu podataka tabele 1, ako je npr. $\mu_y = 1$ i $\mu_x = 0{,}1$, tada je

$$\mu_{\alpha} = 5372'' = 1°29'32'';$$

ako je pak

$$\mu_y = \mu_x = 1,$$

tada je

$$\mu \ = 5167'' = 1°26'07''.$$

S obzirom da ilustracija postupka 3.2. na eksperimentalnom poligonu, ako je $\mu_x = 1$ i $\mu_y < 1$ (usled ekstremnog položaja: $\alpha^{\circ} \sim 8^{\circ}$), zbog veoma malih promena nije mogla dati dovoljno procenjiva odstupanja, to je izrađen drugi, za procenu podesniji brojni primer, takođe od pet tačaka sa sledećim polaznim podacima:

$$[\overline{yy}] = 40 \qquad [\overline{yx}] = 20{,}4 \qquad [\overline{xx}] = 10{,}84$$

Tabela 3

p_y	p_x	α			μ_α		
		0	I	II	0	I	II
1	10000	27	58	28	2	48	22
1	100	27	57	04	2	48	00
1	25	27	51	41	2	47	06
1	4	27	31	12	2	44	47
1	1	27	13	24	2	44	09
4	1	27	04	52	2	44	18
25	1	27	01	52	2	44	23
100	1	27	01	30	2	44	26
10000	1	27	01	20	2	44	27

U tabeli 3 dati su podaci određivanja najverovatnijih vrednosti i standard-da ugla α. Naravno, ukoliko bismo za merene rezultate odabrali rastureniji skup tačaka, tada bi i standardi pokazivali veća međusobna odstupanja. Ekstremne vrednosti ugla α računaju se izrazima poglavlja 2.:

$$\alpha_1 = 27°01'18'' \pm 2°44'27'' \quad i \quad \alpha_2 = 27°59'06'' \pm 2°48'22''.$$

Tabela 4 sadrži za različite odnose težina uspostavljene sume kvadrata popravaka određene primenom postupaka 3.1 i 3.2. Otežinjena suma kvadrata popravaka v^TPv sračunata u okviru postupka 3.2. slaže se sa homogenizacijom sistema nastalom vrednošću $v'^Tv' = v'^T_0v'_0$.

Tabela 4

p_y	p_x	v^TPv Postupak 3.2.	$v_0^TP_0v_0$ Postupak 3.1.
1	10000	1,613 7160	1,617 1329
1	100	1,555 7204	1,560 2507
1	25	1,408 2895	1,409 9623
1	4	0,845 4274	0,842 1405
1	2	0,570 7908	0,570 4761
1	1	0,345 3815	0,345 3815
4	1	0,409 3198	0,411 2288
25	1	0,431 5203	0,434 4191
100	1	0,434 6853	0,437 9473
10000	1	0,435 9864	0,439 1242

Pri usvojenim težinama u tabeli 4 pokazuje se da je — izuzimajući odnose težina $p_y = 1$ i $p_x = 2$ kao i $p_y = 1$ i $p_x = 4$ — minimalna vrednost sume kvadrata popravaka zaista realizovana postupkom 3.2.

4. ZAVRŠNE NAPOMENE

Imajući u vidu analizu postupaka interpretiranih u poglavljima 2. i 3.1., proizlazi da je postupak 3.2. protivrečan, i to prvenstveno zbog toga što se zadovoljavanjem uslova $v^TPv = \min.$ ne obezbeđuje određivanje najverodostojnije vrednosti traženog ugla α. Međutim, cilj obrade podataka bi svakako morao biti taj da se ugao α odredi sa najvećom mogućom verodostojnošću. Neobično je i to da, ako se npr. apscise drže na jednom nivou verodostojnosti, a u odnosu na njih tačnost ordinata povećava, ili obrnuto, ako se ordinate drže na istom nivou, a u odnosu na njih tačnost apscisa povećava, verodostojnost ugla α uvek se pogoršava; i to na način da ukoliko se više povećava tačnost merenih rezultata u pravcu jedne ose, utoliko se više pogoršava verodostojnost ugla α.

Razlozi za pomenutu protivrečnost ne mogu se tražiti u opštim principima računa izravnanja, nego u okolnostima što postupak 3.2. nije na liniji egzaktne obrade podataka. Postupci određivanja parametara prave 2. i 3.1. pokazali su da je promena težina bez uticaja na definitivne rezultate. Pored toga — kao što je već i ranije pomenuto — otežinjavanje je bez uticaja i na uspostavljanje skupa tačaka, jer bilo kako da usvojimo μ_x i μ_y, uvek nastaje identično polje tačaka, tačke su istog stepena poverenja, dok su svi elementi skalarne matrice težina P_0 pri bilo kom odnosu težina na glavnoj dijagonali međusobno jednaki. U takvom slučaju se, pak, zadovoljavanjem uslova $v_0^T P_0 v_0 = \min.$ dobija ona vrednost ugla α kao i da je zadovoljen uslov $v_0^T v_0 = \min.$ Istovremeno, zadovoljavanjem uslova $v_0^T v_0 = \min.$ obezbeđuje se i najverodostojnija vrednost ugla α. Ako se zatim, iz nekih razloga, ukaže potreba da se vektor popravaka v_0 razloži na vektor popravaka merenja v_x i v_y saobrazno usvojenom odnosu težina, onda se to uvek i bez teškoća može ostvariti posredstvom formula (38a) i (38b).

Istraživanja su nedvosmisleno ukazala na to da je pri računanjima *usvajanje odnosa težine apscisa i ordinata izlišno i da je, izuzev slučaja uopšteno promenljivih težina, potrebno zadovoljiti uslov $v^T v = \min.$* S obzirom da veličine merene u pravcu samo jedne ose same po sebi ne znače ništa jer je za određivanje položaja tačaka u ravni potrebno raspolagati sa po dva merena podatka u pravcu obeju osa, to je uzimanje u obzir, odnosno usvajanje odnosa težina iluzorno i usiljeno. Ukoliko, pak, merene veličine u pravcu dveju osa označavaju podatke razlčitih karakteristika (dimenzija), onda se postavlja pitanje na koji je način moguće ustanoviti međusobni odnos standarda μ_x i μ_y. (U okviru ovog istraživanja merenja u pravcu jedne ose označavaju odstojanja, a u pravcu druge ose podatke ubrzanja.)

Treba naglasiti da transformacija težina nema funkciju da promeni definitivne rezultate najverovatnijih parametara prave, nego joj je isključivi zadatak da privremenom eliminacijom težina pojednostavi računanja.

Najzad, ako se primenom postupka 3.2. sa usvojenim težinama p_x odnosno p_y približavamo beskonačnosti, tada se, zapravo, približavamo jednoj od graničnih vrednosti ugla α, tj. α_1 ili α_2. Međutim, slučaj računanja samo ordinatnih popravaka ($p_x = \infty$), odnosno samo apscisnih popravaka ($p_y = \infty$), koji se može realizovati postupcima 2. i 3.1., nije moguće primeniti u okviru postupaka 3.2., jer bi trebalo odgovarajuću koordinatu podeliti sa nulom. Ekstremne vrednosti ugla α isključivo se određuju postupcima izloženim u poglavlju 2. U takvom slučaju obrada podataka se može i treba da, umesto sa uzimanjem u obzir odnosa težina, pojednostavi zadovoljavanjem uslova $v_1^T v_1 = v_2^T v_2 = \min.$

LITERATURA

[1] Ivanović, B.: Teorijska statistika, Beograd 1966.
[2] Kramer, G.: Matematičeskie metody statistiki (prevod s engleskog), Moskva 1975.
[3] Markuze, Ju. i.: Algoritam uravnivanija kombinirovannyh geodezičeskih setej, Moskva 1982.
[4] Molnar, I.: Određivanje prave posredstvom eksplicitnih oblika jednačine prave, Tehnika, Beograd 1988, No 12., 1201—1205.
[5] Molnar, I.: Određivanje parametara linearne zavisnosti pomoću segmentnog oblika jednačina prave, Naše građevinarstvo, Beograd 1989., br. 5., 389—394.
[6] Smirnov, N. V. i dr.: Kurs teorii verojatnostej i matematičeskoj statistiki dlja tehničeskih priloženij, Moskva 1965.
[7] Vranić, V.: Vjerojatnost i statistika, Zagreb 1965.
[8] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Qvadrate, Bonn 1968.

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE LINEAR DEPENDENCE

In the paper, the determination of the extreme and the most probable parameters of the straight line is interpreted, as well as the grade measure until which the relation between the measured sets of points aproaches to the linear dependance. In the determination of the parameters of the set of points, it is needlees to ceep account about the weight relation. Consequently data elaboration, exept the case of the generally variable weights, can be realised (and it is realised), satisfying the condition that $v^Tv = \min$. The short review of the homogeneousness of the weights which determine the most probable parameters of the straight line, is given. Such a data elaboration, based on the condition that $v^TPv = \min.$, has the effect on the change of the final results, but not ensure the most reliable values of unknowns.

Primljeno: 1989—10—21