UDK 528.236(497.1)
Stručni članak

POBOLJŠANJA ALGORITMA ZA TRANSFORMACIJU KOORDINATA IZMEĐU SUSJEDNIH SUSTAVA GAUß-KRÜGEROVE PROJEKCIJE NA PODRUČJU JUGOSLAVIJE

Nada VUČETIĆ, Svetozar PETROVIĆ, Marina ŽIC-NEJAŠMIĆ, Nedjeljko FRANČULA, Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK: U članku se opisuju poboljšanja ranije objavljenih algoritama. Pojednostavljeno je automatsko određivanje sustava u kojem se nalazi točka i sustava u koji je treba transformirati. Posebna pažnja posvećena je računanju širine φ_1. *Numeričkim testiranjem u graničnim područjima određeni su nužni članovi u formulama i nužan broj znamenaka u konstantama. Priložen je detaljan dijagram toka i primjer računanja.*

1. UVOD

Formule za direktnu transformaciju koordinata između susjednih sustava Gauß-Krügerove projekcije objavio je Ehlert (1970). O primjeni tih formula na području Jugoslavije već je pisano u Geodetskom listu (Frančula 1973). Taj algoritam uvršten je i u poznati udžbenik prof. Borčića (1976), a zajedno s drugim algoritmima za računanja u Gauß-Krügerovoj projekciji i u monografiju (Frančula 1980). Preko tih radova doživio je vrlo široku primjenu u našoj geodetskoj praksi (vidi npr. Marković 1981, Buder 1982).

Glavni razlog što se ponovno vraćamo tom zadatku jest želja da ga riješimo što efikasnije, pa da predloženi algoritam može poslužiti kao uzor ili standard.

Naše su polazne pretpostavke bile: želimo algoritam koji ćemo primjenjivati na području Jugoslavije i koji će osigurati da položajne pogreške transformiranih točaka budu uvijek manje od 1 mm.

2. POBOLJŠANJA ALGORITMA

U odnosu na algoritam iz 1973. poboljšanja i skraćenja ima više. Oba algoritma predviđena su za računanje samo na području Jugoslavije, dakle pret-

* Nada Vučetić, dipl. inž., Svetozar Petrović, dipl. inž., Marina Žic-Nejašmić, dipl. inž., prof. dr. Nedjeljko Frančula, Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

postavlja se Besselov referentni elipsoid, pa su ulazni podaci samo ime i koordinate y, x zadane točke.

2.1. *Određivanje sustava u kojem se nalazi zadana točka i sustava u koji je treba transformirati*

Jugoslavija je pokrivena petim, šestim i sedmim Gauß-Krügerovim koordinatnim sustavom, prema tome postoje dva preklopna područja na kojima se ovaj algoritam želi primjenjivati.

U radu (Frančula 1973) broj sustava u kojem se nalazi točka (5, 6 ili 7), kao i u koji sustav treba izvršiti transformaciju, utvrđuje se pomoću nekoliko »uvjetnih skokova« (IF . . . THEN . . .).

U ovdje objavljenom algoritmu to određivanje znatno je pojednostavljeno. Poznato je da prva znamenka ordinate y označava broj sustava. Dakle, da bi se iz ordinate y odredio sustav u kojem se dotična točka nalazi, potrebno je izdvojiti prvu znamenku. Ako se y pomnoži s 0,000001, te odbace znamenke iza decimalnog zareza, dobit će se broj sustava. Budući da je y uvijek pozitivan, to odbacivanje znamenaka može se uraditi pomoću funkcije »najveći cijeli broj sadržan u zadanom broju«, koja postoji u većini programskih jezika, obično pod imenom INT. Množenjem broja sustava s 1000000 i dodavanjem 500000 dobiva se ordinata (YK) osi x pripadnog sustava.

Na primjer, ako je

$$y = 5502123{,}56,$$

tada je

$$\mathrm{INT}\,(y \cdot 0{,}000001) = 5,$$

a

$$YK = \mathrm{INT}\,(y \cdot 0{,}000001) \cdot 1000000 + 500000 = 5500000.$$

Ordinatu osi x (YKC) susjednog sustava u koji treba transformirati zadanu točku određujemo pomoću izraza

$$YKC = YK + PR \cdot 1000000,$$

gdje je PR = sgn (y—YK). Varijabla PR poprima vrijednost

$$PR = \begin{cases} -1 \text{ za } (y - YK) < 0 \\ \;\;\,0 \text{ za } (y - YK) = 0. \\ \;\;\,1 \text{ za } (y - YK) > 0 \end{cases}$$

Ukoliko se točka nalazi istočno od osi x sustava u kojem je zadana, vrijednost varijable PR bit će jednaka 1, ordinati YK dodat će se 1000000, te će se za

YKC dobiti ordinata osi x sustava koji leži istočno od polaznoga. Analogno tome, za zadanu točku koja se nalazi zapadno od osi x vrijednost PR bit će jednaka —1, a za YKC dobit će se ordinata osi x sustava koji leži zapadno od zadanoga. Za y = YK dobije se PR = 0 i točka se ne transformira ni u jedan susjedni sustav, ali na takve točke se ovaj algoritam ionako ne primjenjuje.

2.2. *Računanje širine* φ_1

Treba odrediti širinu φ_1 točke T tako da duljina luka meridijana od ekvatora do točke T bude jednaka zadanoj apscisi x. Ovaj problem formulirao je i riješio Helmert (1880). Njegovo je rješenje izraz za širinu φ_1 u obliku (prvih nekoliko članova) beskonačnog reda sinusa višestrukih kutova, s time da su i odgovarajući koeficijenti napisani u obliku (prvih nekoliko članova) beskonačnog reda potencija parametra n (treća spljoštenost). Helmertove izraze za koeficijente napisali su kasnije s većim brojem članova Krüger (1912), te König i Weise (1951), a mogu se naći i u novijoj literaturi (vidi npr. Vincenty 1971, s jednom, vrlo vjerojatno, štamparskom pogreškom, ili Ehlert 1982).

Spomenuti problem određivanja širine φ_1 pojavljuje se redovito u vezi s računanjima u Gauß-Krügerovoj projekciji. Da bi se olakšala računanja, preporučala se primjena za tu svrhu sastavljenih tablica (vidi npr. Krüger 1912, Pravilnik 1951, Borčić 1955, Hristov 1957, Živković 1972, Schödlbauer 1982, Jovanović 1983). Da je u današnje vrijeme upotreba tablica nepotrebna, ne treba posebno dokazivati.

Razvojem računala postale su popularne razne numeričke iterativne metode zbog relativne jednostavnosti za programiranje. Tako su se neke od njih primjenjivale i za određivanje širine φ_1 (vidi npr. Speidel 1966, Frančula 1973, 1980, Borčić 1976, Varga 1983, Gerstl 1984, Glasmacher 1987). Međutim, lako se može pokazati da je pri primjeni iterativnih metoda (koje se pojavljuju u navedenoj literaturi) potreban mnogo veći broj računskih operacija nego što je to pri primjeni Helmertove formule, samo napisane u drugom obliku. Tako je Vincenty (1971) predložio da se umjesto kosinusa višestrukih kutova koriste potencije kosinusa jednostrukog kuta (vidi također Frančula 1979). Slijedeće poboljšanje je također razvijanje u red, ali po potencijama kosinusa dvostrukog kuta:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= g + \sin(2g)\,(k_0 + k_1 \cos(2g) + k_2 \cos^2(2g) + \ldots) = \\
&= g + \sin(2g)\,(k_0 + \cos(2g)\,(k_1 + \cos(2g)\,(k_2 + \ldots))),
\end{aligned}
$$

vidi npr. (Wolfrum 1987). Prednosti ove formule pred razvojem po potencijama kosinusa jednostrukog kuta mogu se izvesti analogno kao što je to učinio Lapaine (1990) u vezi s računanjem duljine luka meridijana. U gornjoj formuli je $g = \bar{x}/A$, gdje je $\bar{x}$ nereducirana apscisa zadane točke, A polumjer sfere čiji su meridijani jednake duljine kao meridijani promatranog referentnog elipsoida, u našem slučaju Besselova, a k_0, k_1, k_2, ... odgovarajuće konstante. Uočimo da je, bez obzira na to koliko članova reda trebamo za postizanje tražene točnosti, dovoljno izračunati samo jedan sinus i samo jedan kosinus za pojedinu točku, a sve ostale operacije su zbrajanja i množenja.

2.3. *Određivanje nužnih članova u formulama i nužnog broja znamenaka u konstantama*

S obzirom na polazne pretpostavke željeli smo utvrditi nužne članove u izrazu za φ_1, kao i u Ehlertovim formulama za direktnu transformaciju, te nužni broj znamenaka u svim konstantama. U tu svrhu provedeno je ispitivanje duž graničnih meridijana sustava, u pojasu širokom 1° (0,5° istočno i zapadno od tih meridijana). U tim područjima generirane su točke u pravilnom rasteru međusobno udaljene 1 km, ukupno oko 180000 točaka.

Da bismo mogli provesti testiranje, najprije su nam bile potrebne takve formule koje daju točnost bitno veću od one koja nam treba. Naše je istraživanje pokazalo da u tu svrhu mogu poslužiti Ehlertove »dugačke« formule s članovima do na osmu potenciju (Ehlert 1970) uz računanje širine φ_1 pomoću razvoja do $\cos^4(2g)$ i uzimanje svih konstanti na onoliko znamenaka koliko se može prikazati na računalu u dvostrukoj točnosti. Rezultate takvog računanja uzimali smo kao »bespogrešne« i s njima uspoređivali rezultate koje daje ovdje predloženi algoritam.

Ispitivanjem smo utvrdili da uz naše polazne pretpostavke možemo na 1° širokim preklopima zona na području Jugoslavije iz Ehlertovih »kratkih« formula (objavljenih u Ehlert 1970, Frančula 1973, Borčić 1976) izostaviti jedan član u izrazu za $\overline{y}'$, pa preostaje:

$$\overline{y}' = z + \frac{1}{6N^2}(1 - t^2 + \eta^2) z^3 + \frac{1}{2N^2} t^2 z \overline{y}^2 + \frac{1}{6N^2}(-1 - 2t^2 - \eta^2)\overline{y}^3 +$$

$$+ \frac{1}{120N^4}(5 - 18t^2) z^5 + \frac{1}{12N^4}(5t^2 - t^4) z^3 \overline{y}^2 +$$

$$+ \frac{1}{12N^4}(-1 - t^2 + 2t^4) z^2 \overline{y}^3 + \frac{1}{24N^4}(-8t^2 - 3t^4) z \overline{y}^4 +$$

$$+ \frac{1}{120N^4}(5 + 18t^2 + 4t^4)\overline{y}^5,$$

$$\overline{x}' = \overline{x} + \frac{t}{2N} z^2 - \frac{t}{2N}\overline{y}^2 + \frac{t}{24N^3}(5 - t^2 + 9\eta^2) z^4 +$$

$$+ \frac{t}{4N^3}(-1 + t^2 - \eta^2) z^2 \overline{y}^2 + \frac{t}{6N^3}(-1 - 2t^2 - \eta^2) z \overline{y}^3 +$$

$$+ \frac{t}{24N^3}(5 + 3t^2 + \eta^2)\overline{y}^4.$$

U ovim je formulama:

$$z = \overline{y} - PR \cdot L \cdot N \cdot \cos\varphi_1,$$

PR — predznak (vidi odjeljak 2.1.),
$\overline{y}, \overline{x}$ — nereducirane koordinate točke,
$\overline{y}', \overline{x}'$ — transformirane nereducirane koordinate točke,

$$N = \frac{c}{(1 + \eta^2)^{1/2}},$$

$$\eta^2 = \frac{e'^2}{1 + t^2},$$

$$t = tg\,(\varphi_1),$$

uz zadane konstante:

e'^2 — kvadrat drugog numeričkog ekscentriciteta,
c — polumjer zakrivljenosti na polovima,
L — razlika geografskih duljina srednjih meridijana susjednih sustava u radijanima).

Pri tome se širina φ_1 može računati pomoću

$$\varphi_1 = g + \sin(2g)\,(k_0 + k_1 \cos(2g)),$$

gdje je $g = \bar{x}/A$.

Vrijednosti svih konstanti su (ovdje dane na onoliko znamenaka koliko je potrebno za postizanje željene točnosti):

$$c = 6398786{,}85$$

$$A = 6366742{,}52$$

$$e'^2 = 0{,}00671922$$

$$L = 0{,}0523598776$$

$$k_0 = 0{,}002511266$$

$$k_1 = 0{,}000007359,$$

pri čemu su vrijednosti za c, A, e'^2 izračunane iz pretpostavke da je referentni elipsoid Besselov, čije su poluosi a i b zadane pomoću

$$\log a = 6{,}8046434637$$

$$\log b = 6{,}8031892839,$$

a iznos od L predstavlja 3° izražena u radijanima.

Iako je navedena formula za računanje φ_1 tako jednostavna, ona ipak omogućava postizanje zahtijevane točnosti transformiranih koordinata zahvaljujući tome što su konstante k_0 i k_1 odabrane baš tako da budu optimalne za promatrano područje Jugoslavije. Naime, ako se konstante k_0 i k_1 u formuli

$$\varphi_1 = g + \sin(2g)\,(k_0 + k_1 \cos(2g))$$

uzmu iz uobičajenog razvoja u red, dobije se izraz koji garantira neku točnost na području koje je mnogo šire od onoga na kojem ga mi želimo primjenjivati. Neki drugačiji izbor konstanti dat će manju točnost preko velikog, ali može dati veću točnost na nekom malom području. Naš je zadatak bio da odaberemo k_0 i k_1 tako da dobijemo zadovoljavajuću točnost na promatranim područjima u Jugoslaviji. Kako je to napravljeno, kao i razmatranje drugih načina njihova određivanja, bit će predmet nekog budućeg rada.

3. TESTIRANJE BRZINE IZVOĐENJA PROGRAMA

Da bismo i praktično provjerili efikasnost novog algoritma u odnosu na stari, proveli smo testiranje na računalu. Oba algoritma implementirali smo na IBM AT kompatibilnom računalu i ispitali koliko je vremena potrebno za transformiranje istog broja točaka. To smo isprobali s nekoliko skupova od 50—2000 točaka. Pojedina testiranja dala su rezultate koji su samo malo varirali, a srednja relativna vremena navodimo u tablici 1, i to zapisana na četiri načina, gdje je u svakom jedno od četiri vremena uzeto kao jedinica.

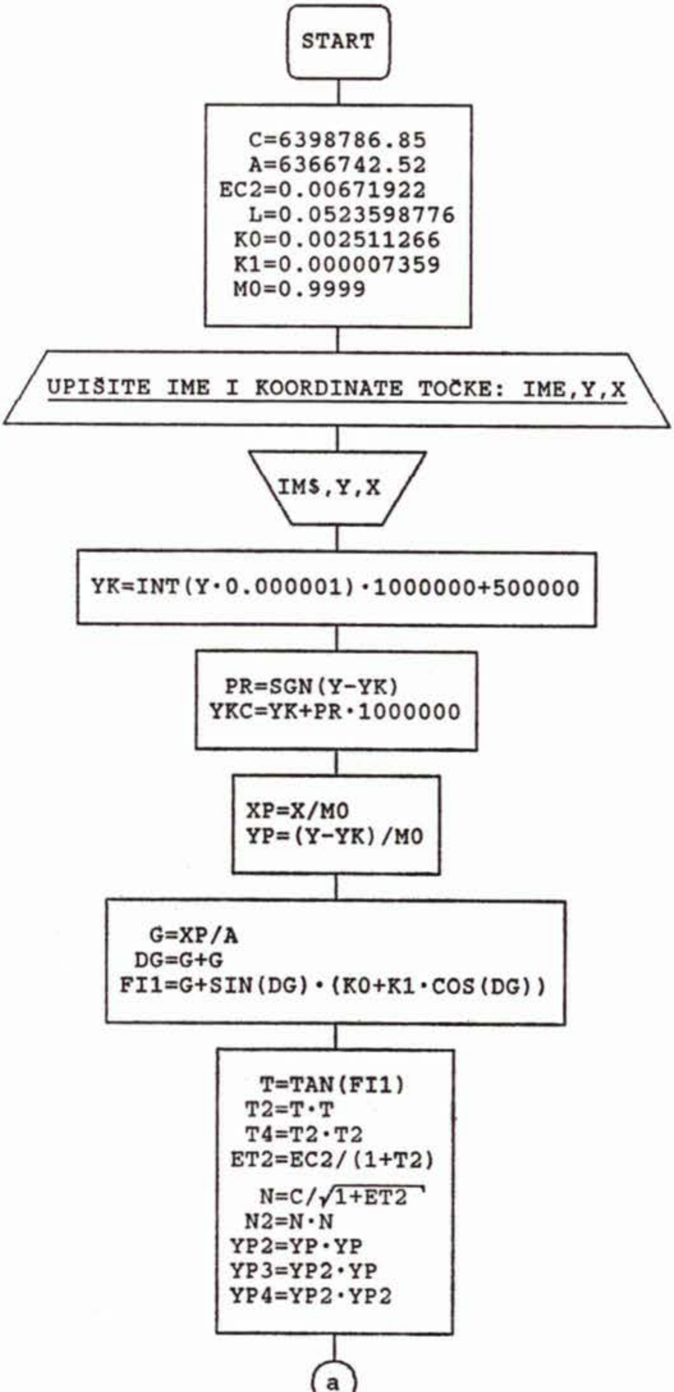
Tablica 1. Odnosi vremena izvođenja programa prema starom i novom algoritmu

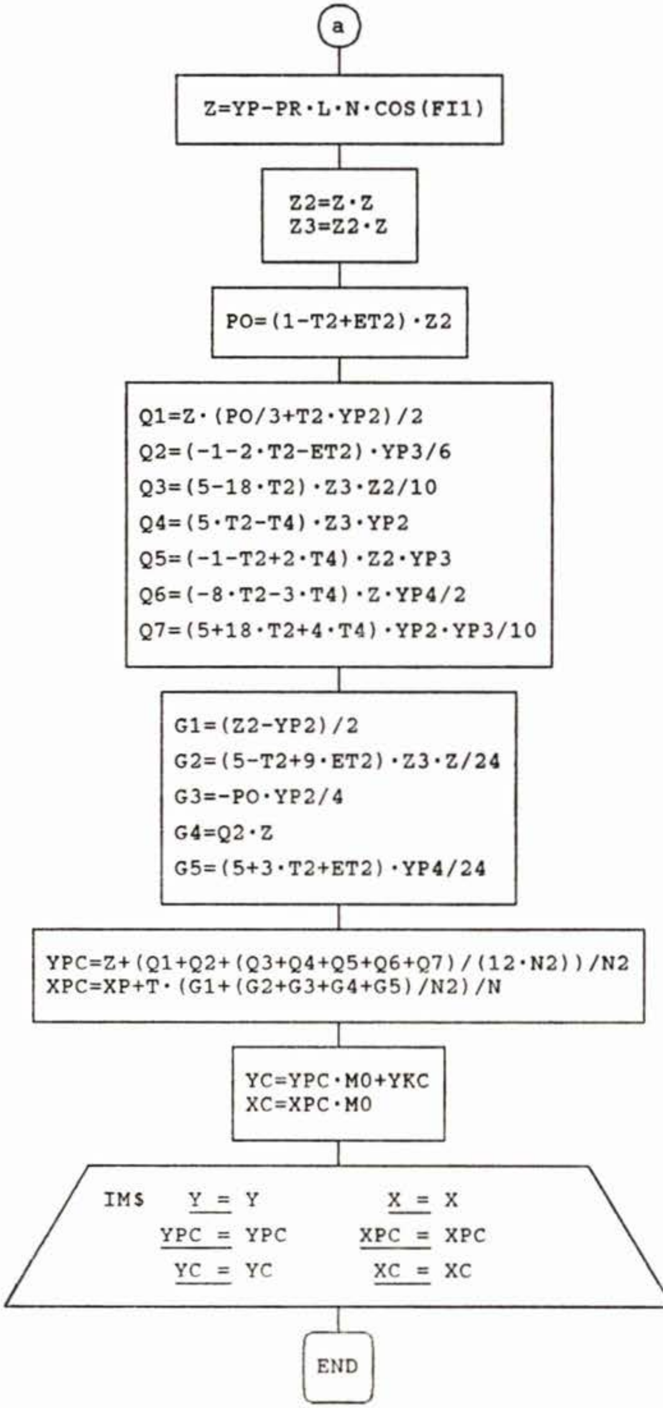
Stari bez koprocesora	Stari s koprocesorom	Novi bez koprocesora	Novi s koprocesorom
115	12,1	6,3	1
18,4	1,9	1	0,16
9,5	1	0,52	0,083
1	0,11	0,055	0,0087

Naravno da odnos između efikasnosti starog i novog algoritma nije isti kada se upotrebljava i kada se ne upotrebljava matematički koprocesor. Dok je bez koprocesora novi oko 18 puta brži, s koprocesorom taj je omjer »samo« oko 12. Interesantno je da je novi program i bez koprocesora gotovo dva puta brži nego stari sa koprocesorom. Treba napomenuti da ovakva velika poboljšanja ne potječu samo od razlika u algoritmu, nego i od nekih dobrih programerskih rješenja koja smo sada primijenili, a vidljiva su iz priloženog dijagrama toka.

4. DIJAGRAM TOKA

Kompletno računanje prikazano je u priloženom dijagramu toka. U ovom radu naglasak je na poboljšanju i standardizaciji algoritma. Budući da osim toga želimo istaknuti i neka dobra programerska rješenja, nismo se u izradi dijagrama toka držali uobičajenog zapisa formula, već je zapis bliži zapisu u programskim jezicima. Time ujedno omogućujemo da se iz dijagrama toka


START
C=6398786.85
A=6366742.52
EC2=0.00671922
L=0.0523598776
K0=0.002511266
K1=0.000007359
M0=0.9999
UPIŠITE IME I KOORDINATE TOČKE: IME,Y,X
IM$,Y,X
YK=INT(Y·0.000001)·1000000+500000
PR=SGN(Y-YK)
YKC=YK+PR·1000000
XP=X/M0
YP=(Y-YK)/M0
G=XP/A
DG=G+G
FI1=G+SIN(DG)·(K0+K1·COS(DG))
T=TAN(FI1)
T2=T·T
T4=T2·T2
ET2=EC2/(1+T2)
N=C/√1+ET2
N2=N·N
YP2=YP·YP
YP3=YP2·YP
YP4=YP2·YP2
a


a
Z=YP-PR·L·N·COS(FI1)
Z2=Z·Z
Z3=Z2·Z
PO=(1-T2+ET2)·Z2
Q1=Z·(PO/3+T2·YP2)/2
Q2=(-1-2·T2-ET2)·YP3/6
Q3=(5-18·T2)·Z3·Z2/10
Q4=(5·T2-T4)·Z3·YP2
Q5=(-1-T2+2·T4)·Z2·YP3
Q6=(-8·T2-3·T4)·Z·YP4/2
Q7=(5+18·T2+4·T4)·YP2·YP3/10
G1=(Z2-YP2)/2
G2=(5-T2+9·ET2)·Z3·Z/24
G3=-PO·YP2/4
G4=Q2·Z
G5=(5+3·T2+ET2)·YP4/24
YPC=Z+(Q1+Q2+(Q3+Q4+Q5+Q6+Q7)/(12·N2))/N2
XPC=XP+T·(G1+(G2+G3+G4+G5)/N2)/N
YC=YPC·M0+YKC
XC=XPC·M0
IM$ Y = Y X = X
YPC = YPC XPC = XPC
YC = YC XC = XC
END

lako napiše program u nekom od programskih jezika, naročito u BASIC-u ili FORTRAN-u. Pri tome treba paziti da se odabere takav tip varijabli i konstanti koji će osigurati dovoljnu točnost. Iz navedenih konstanti vidljivo je da u standardnom FORTRAN-u 77 ili MICROSOFT-ovu BASIC-u taj zahtjev zadovoljava dvostruka točnost (DOUBLE PRECISION). Tada će zaista biti garantirano da položajna odstupanja transformiranih točaka (u navedenim područjima Jugoslavije) budu manja od 1 mm (zapravo manja od 0,6 mm, što smo utvrdili testiranjem).

5. PRIMJER RAČUNANJA

Da bismo potencijalnim korisnicima olakšali implementiranje ovog algoritma, navodimo i primjer računanja:

```
TRANSFORMACIJA PRAVOKUTNIH KOORDINATA IZ JEDNOG
KOORDINATNOG SUSTAVA U SUSJEDNI SUSTAV

--------------------------------------------------------------

1a        Y=   5611230.423          X=   5066532.532

        YPC=   -122229.016        XPC=   5067245.274
         YC=   6377783.207         XC=   5066738.549

--------------------------------------------------------------

1b        Y=   6377783.207          X=   5066738.549

        YPC=    111241.547        XPC=   5067039.236
         YC=   5611230.423         XC=   5066532.532

--------------------------------------------------------------

2a        Y=   6613943.811          X=   4995286.930

        YPC=   -122173.955        XPC=   4995938.936
         YC=   7377838.262         XC=   4995439.342

--------------------------------------------------------------

2b        Y=   7377838.262          X=   4995439.342

        YPC=    113955.207        XPC=   4995786.509
         YC=   6613943.811         XC=   4995286.930

--------------------------------------------------------------
```

LITERATURA

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb 1955.

Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1976.

Buder, I. (1982): Za suvremenije načine računanja, Geodetski list, 1982, 4—6, 148—150.

Ehlert, D. (1970): Die direkte Umformung Gaußscher Koordinaten in den benachbarten Meridianstreifen, Professor Dr.-Ing. Helmut Wolf zum 60. Geburtstag, Institut für Kartographie und Topographie der Universität, Bonn 1970, 26—31.

Ehlert, D. (1982): Zur direkten Berechnung der geographischen Breite aus der Meridianbogenlänge auf Rotationsellipsoiden, AVN, 1982, 11—12, 460—461.

Frančula, N. (1973): Direktna transformacija koordinata pomoću elektroničkih računala između susjednih koordinatnih sustava Gauss-Krügerove projekcije, Geodetski list, 1973, 10—12, 211—216.

Frančula, N. (1979): Primjena džepnih računala u rješavanju zadataka Gauß-Krügerove projekcije, Geodetski list, 1979, 4—6, 95—102.

Frančula, N. (1980): Kompjuterski program za računanja u Gauß-Krügerovoj projekciji, Zbornik radova, Niz A, sv. br. 23, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1980.

Gerstl, M. (1984): Die Gauß-Krügersche Abbildung des Erdellipsoides mit direkter Berechnung der elliptischen Integrale durch Landentransformation, DGK, Reihe C, Heft 296, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1984.

Glasmacher, H. (1987): Die Gaußsche Ellipsoid-Abbildung mit komplexer Arithmetik und numerischen Näherungsverfahren, Schriftenreihe des Studiengang Vermessungswesen an der Universität der Bundeswehr München, Heft 29, München 1987.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen, B. G. Teubner, Leipzig 1880.

Hristov, V. K. (1957): Koordinaty Gaussa-Krjugera na ellipsoide vraščenija, Geodezizdat, Moskva 1957.

Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Vojnogeografski institut, Beograd 1983.

König, R. i Weise, K. H. (1951): Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Erster Band, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, Potsdam: Veröffentlichung des Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge No. 52, B. G. Teubner, Leipzig 1912.

Lapaine, M. (1990): Duljina luka meridijana, Geodetski list, 1990, 4—6, 97—108.

Marković, D. (1981): Programi za rešavanje nekih geodetskih zadataka džepnim elektronskim računarom »Hewlett Packard 67«, Zbornik radova, Vojnogeografski institut, Beograd 1981.

Pravilnik (1951) za državni premer, I deo, Triangulacija, Knjiga prva, Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Jugoslovensko štamparsko preduzeće, Beograd 1951.

Schödlbauer, A. (1982): Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung, Teil 2, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe 1982.

Speidel, D. (1966): Koordinatentransformationen auf der IBM 1620, AVN, 1966, 6, 227—232.

Varga, J. (1983): Conversions between Geographical and Transverse Mercator (UTM, Gauss-Krüger) Grid Coordinates, Periodica polytechnica, Civil engineering, 1983, 3—4, 239—251.

Vincety, T. (1971): The Meridional Distance Problem for Desk Computers, Survey Review, 1971, No. 161, 136—140.

Wolfrum, O. (1987): Die Berechnung der Meridianbogenlänge und der Fußpunktbreite mittels der dritten Abplattung, AVN, 1987, 7, 249—256.

Živković, A. (1972): Viša geodezija, Građevinska knjiga, Beograd 1972.

IMPROVING THE ALGORITHM FOR THE TRANSFORMATION BETWEEN TRANSVERSAL MERCATOR COORDINATE SYSTEMS ON THE TERRITORY OF YUGOSLAVIA

The improvements of the previously published algorithms are described. Determining the system in which the given point lies, and the system into which it should be transformed, is simplified. Special attention is paid to the calculation of the latitude φ_1. The necessary members in formulas and the needed number of digits in constants have been determined by performing numerical tests in overlap regions. A detailed flowchart and a computation example are enclosed as well.

Primljeno: 1990-07-19