UDK 528.35.021.7:528.517 DI 3000:528.14
Originalni znanstveni članak

USPOREDBA METODA IZJEDNAČENJA TRILATERACIJSKIH MREŽA MJERENIH ELEKTROOPTIČKIM DALJINOMJERIMA

Asim BILAJBEGOVIĆ, Milivoj JUNAŠEVIĆ, Željko BAČIĆ — Zagreb*

SAŽETAK: U ovom radu ispituju se modeli izjednačenja trilateracijskih mreža, klasična funkcionalna veza i funkcionalna veza na osnovi odnosa dužina, ali za daljinomjer DI 3000, kod kojeg standardno odstupanje mjerenih dužina po tvorničkim podacima glasi $\sigma_s = \pm$ (5 mm + 1 ppm), odnosno koji ima oko 5 puta veću pogrešku adicione konstante u odnosu na pogrešku multiplikacione konstante i u slučaju mjerenja meteoroloških parametara i unošenja korekcija pri obradi mjerenja po obje metode. Numerički rezultati nesumnjivo potvrđuju prednost izjednačenja na osnovi odnosa dužina, što je posebno bitno za mreže postavljene za ispitivanje pomaka objekata.

1. UVOD

Uobičajena metoda izjednačenja trilateracijskih mreža po posrednim mjerenjima zasniva se na funkcionalnoj vezi mjerenih dužina i nepoznatih koordinata. Međutim, postavlja se pitanje mogu li se dobiti točnije koordinate točaka uvođenjem odnosa dužina u izjednačenje umjesto dužina za daljinomjere koji imaju osjetno veću pogrešku adicione konstante u odnosu na pogrešku multiplikacione konstante? Na to pitanje odgovorit ćemo na osnovi sasvim konkretnih mjerenja i numeričkih istraživanja.

2. VARIJANCA MJERENIH DUŽINA ELEKTROOPTIČKIM DALJINOMJERIMA

Varijanca reduciranih dužina na elipsoid može se prikazati u obliku (Bilajbegović 1990), pod pretpostavkom zanemarivanja pogrešaka centriranja instrumenta i signala:

$$\sigma_{sr}^2 = \frac{\sigma_\rho^2}{m_1} + \sigma_c^2 + \frac{s^2 \cdot \sigma_n^2}{m_2 \cdot n^2} + \frac{\sigma_{\Delta s}^2}{m_3}, \qquad (2\text{-}1)$$

* Prof. dr Asim Bilajbegović, doc. dr Milivoj Junašević, Željko Bačić, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb Kačićeva 26.

gdje je:

σ_{sr}^2 — varijanca reducirane dužine,
σ_{φ}^2 — varijanca mjerene fazne razlike,
σ_c^2 — varijanca adicione konstante,
σ_n^2 — varijanca indeksa loma (funkcija temperature, tlaka zraka i tlaka vodene pare u zraku),
$\sigma_{\Delta s}^2$ — varijanca redukcija prostorne dužine na plohu elipsoida,
n — indeks loma,
s — mjerena dužina,
m_1 — broj mjerenja faznih razlika,
m_2 — broj mjerenja meteoroloških podataka (p, t, e) i
m_3 — broj mjerenja visinske razlike, odnosno visina krajnjih točaka.

Većina tvornica daje (2-1) u obliku:

$$\sigma_s = \pm (a + b \cdot s), \qquad (2\text{-}2)$$

gdje je:

a — unutarnja standardna devijacija,
b — vanjska standardna devijacija,

odnosno

$$a = \sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_c^2} \quad \text{i} \quad b = \sigma_n/n.$$

S prethodnim izrazima vrijedi:

$$\sigma_s = \sqrt{a^2 + b^2 \cdot s^2} \neq (a + b \cdot s). \qquad (2\text{-}3)$$

Drugim riječima, tvornička formula za ocjenu točnosti mjerenih dužina nije baš potpuno u redu. Postavlja se pitanje može li se metodom izjednačenja smanjiti ili eliminirati neka od varijanci u (2-1)? Akceptira li se formula (2-2), tada:

a — predstavlja konstantan dio ili unutrašnju elektrooptičku točnost instrumenta,
b — faktor mjerila ovisan o meteorološkim uvjetima i frekvenciji instrumenta.

Npr. za Mekometar ME 3000

$$\sigma_s = \pm (0{,}2\,\text{mm} + 1\,\text{ppm}) = \pm (\underset{a}{0{,}2\,\text{mm}} + \underset{b\,\cdot\,s}{1 \cdot s\,[\text{km}]})\,[\text{mm}],$$

za ME 5000 $\sigma_s = \pm$ (0,1 mm + 0,2 ppm)
i za DI 3000 $\sigma_s = \pm$ (5 mm + 1 ppm).

Uvođenjem odnosa dužina želi se:

1) eliminirati pogreške b mjerila dužine s,

2) kod daljinomjera tipa MEKOMETAR povećati točnost s obzirom na malu unutarnju pogrešku a instrumenta i

3) izbjeći uspostavljanje meteorološkog modela, tj.
   a) smanjiti broj izvora pogrešaka i
   b) povećati ekonomičnost (smanjiti broj mjerenih podataka o temperaturi, tlaku zraka i vodenoj pari u zraku).

Naravno, smanjenje izvora pogrešaka i povećanje ekonomičnosti može se ostvariti ukoliko se dužine s jednog stajališta mjere pod jednakim uvjetima, tj.:

— unutar kratkog vremena i

— iznad sličnih profila terena.

Dosad iznesene tvrdnje dokazane su u mnogim radovima, npr. Mierlo (1986).

Naš eksperiment ima drugi cilj i sastoji se u slijedećem: može li se povećati točnost i kod daljinomjera kod kojih je adiciona konstanta daleko veća od multiplikacione, pri mjerenju u kojem uzimamo u obzir meteorološke podatke. Npr. kod daljinomjera DI 3000 adiciona je konstanta oko 5 puta veća od multiplikacione, za razliku od Mekometra 3000 gdje je multiplikaciona konstanta veća od adicione 5 puta za dužine od 1 km. Zbog toga su pomoću instrumenta DI 3000 obostrano mjerene dužine u mreži na sl. 2 uz mjerenje temperature i pritiska na krajnjim točkama dužine. Ista mreža izjednačavana je kao slobodna mreža klasično i s uvođenjem odnosa dužina, ali uz uvođenje meteoroloških popravaka.

3. FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL DUŽINA

Linearni model glasi:

$$
\begin{aligned}
E(\underline{l}) &= \underline{\tilde{l}} = \underline{A} \cdot \underline{\tilde{x}} \\
\underline{\hat{l}} &= \underline{l} + \underline{\hat{v}} = \underline{A} \cdot \underline{\hat{x}},
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}1)
$$

gdje je:

$E(\underline{l})$ — očekivana vrijednost mjerenih veličina,

$\underline{l}$ — procijenjene mjerene veličine,

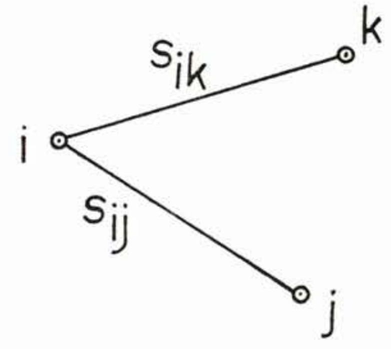
$\underline{A}$ — konfiguracijska ili dizajn-matrica,

$\underline{\hat{v}}$ — procijenjeni popravci,

$\underline{\tilde{x}}$ — prave vrijednosti nepoznanica i

$\underline{\hat{x}}$ — procijenjene vrijednosti nepoznanica.

U svrhu određivanja jednadžbi popravaka neophodno je odrediti funkcije veza.



Sl. 1 Shematski prikaz mjernih veličina

Funkcionalna veza odnosa dužina glasi:

$$\widetilde{O}_{ijk} = \frac{\widetilde{s}_{ij}}{\widetilde{s}_{ik}}, \tag{3-2}$$

gdje je:

$\widetilde{s}_{ij}$ i $\widetilde{s}_{ik}$ — nepoznate prave vrijednosti dužina (i-j) i (i-k) respektivno i
$E(O_{ijk}) = \widetilde{O}_{ijk}$ — očekivana vrijednost odgovarajućeg odnosa dužina,

odnosno uvođenjem nepoznate adicione konstante c:

$$\hat{O}_{ijk} = O_{ijk} + \hat{v}_{ijk} = \frac{[(\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2]^{1/2} - \hat{c}}{[(\hat{y}_k - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_k - \hat{x}_i)^2]^{1/2} - \hat{c}}. \tag{3-3}$$

Razvojem desne strane (3-3) u Taylorov red dobit će se:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{ijk} = O^0_{ijk} &+ \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_i} \cdot dy_i + \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_j} \cdot dx_j + \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_j} \cdot dy_j + \\ &+ \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_k} \cdot dx_k + \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_k} \cdot dy_k + \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial c} \cdot dc - O_{ijk}, \end{aligned} \tag{3-4}$$

gdje je:

$$O^0_{ijk} = \frac{[(y^0_j - y^0_i)^2 + (x^0_j - x^0_i)^2]^{1/2}}{[(y^0_k - y^0_i)^2 + (x^0_k - x^0_i)^2]^{1/2}}, \tag{3-5}$$

$$c_o = 0.$$

Deriviranjem (3-3) dobiju se slijedeće parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_i} = \left[- \frac{\cos \alpha^0_{ij}}{s^0_{ij}} + \frac{\cos \alpha^0_{ik}}{s^0_{ik}} \right] \cdot O^0_{ijk},$$

$$\frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_i} = \left[- \frac{\sin \alpha^0_{ij}}{s^0_{ij}} + \frac{\sin \alpha^0_{ik}}{s^0_{ik}} \right] \cdot O^0_{ijk},$$

$$\frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_j} = \frac{\cos \alpha^0_{ij}}{s^0_{ij}} \cdot O^0_{ijk}, \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_j} = \frac{\sin \alpha^0_{ij}}{s_{ij}} \cdot O_{ijk}, \tag{3-6}$$

$$\frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial x_k} = - \frac{\cos \alpha^0_{ik}}{s^0_{ik}} \cdot O^0_{ijk}, \frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial y_k} = - \frac{\sin \alpha^0_{ik}}{s^0_{ik}} \cdot O^0_{ijk},$$

$$\frac{\partial O^0_{ijk}}{\partial c} = \left[\frac{1}{s^0_{ik}} - \frac{1}{s^0_{ij}} \right] \cdot O^0_{ijk},$$

odnosno koeficijenti konfiguracijske matrice $\underline{A}$.

Uz uvjet izjednačenja:

$$\underline{\hat{v}}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{\hat{v}} = \text{minimum i stohastički model } C = \sigma^2 \cdot \underline{P}^{-1} = I \tag{3-7}$$

dobije su sustav normalnih jednadžbi:

$$\begin{vmatrix} \underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B}^T & \underline{0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{\hat{x}} \\ \underline{\hat{k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{L} \\ \underline{0} \end{vmatrix}, \quad \underline{L} = \underline{O} - \underline{O}^\circ, \tag{3-8}$$

s defektom mreže d = 4, gdje je:

$\underline{\hat{k}}$ — procjenjeni vektor korelata.

Naime, kako se radi o izjednačenju odnosa dužina i slobodnoj mreži, ovdje se susreću dvije translacije, jedna rotacija oko osi z i nepoznato mjerilo. Defekt mreže kod odnosa dužina istovjetan je defektu mreže kod mjerenih pravaca.

Rješenje sustava normalnih jednadžbi glasi:

$$\underline{\hat{x}} = (\underline{A} \cdot \underline{P} \cdot \underline{A})^+ \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{L}, \quad \text{odnosno} \quad \underline{\hat{x}} = (\underline{N} + \underline{B} \cdot \underline{B}^T)^{-1} \cdot \underline{n}, \tag{3-9}$$

gdje je:

$$\underline{n} = \underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{L} \quad \text{i} \quad \underline{N} = \underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{A}. \tag{3-10}$$

Oznaka + označava pseudoinverznu matricu.

Matrica $\underline{B}$ glasi:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x^1 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & 0 & -y_u & x_u \\ 0 & 1 & x_u & y_u \end{vmatrix} \tag{3-11}$$

A posteriori faktor varijance dobije se po slijedećem izrazu:

$$\hat{\sigma}_\sigma^2 = \frac{\underline{\hat{v}}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{\hat{v}}}{r} = \frac{\underline{\hat{v}}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{\hat{v}}}{n - (u - d)}, \tag{3-12}$$

gdje je:

n — broj odnosa dužina,
u — broj nepoznanica i
d — defekt mreže.

Na osnovi matrice kofaktora:

$$\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\underline{A}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{A})^+, \tag{3-13}$$

odnosno uvođenjem nove matrice $\underline{M}$:

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} \underline{N} & \underline{B} \\ \underline{B}^T & \underline{0} \end{vmatrix}, \tag{3-14}$$

odnosno

$$\underline{M}^{-1} = \begin{vmatrix} \underline{N} & \underline{B} \\ \underline{B}^T & \underline{0} \end{vmatrix}^{-1}, \tag{3-15}$$

dobit će se:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = (\underline{N} + \underline{B} \cdot \underline{B}^T)^{-1} - \underline{B} \cdot (\underline{B}^T \cdot \underline{B} \quad \underline{B}^T \cdot \underline{B})^{-1} \cdot \underline{B}^T. \tag{3-16}$$

Ocjena točnosti obavljena je na osnovi matrice kofaktora $\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$, a posteriori faktora varijance $\hat{\sigma}_0$ i elemenata Möhleovih elipsi pogrešaka:

$$a, b = \hat{\sigma}_0 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{\frac{q_{yy} + q_{xx}}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \sqrt{(q_{yy} - q_{xx})^2 + 4q_{xy}^2}} \tag{3-17}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}},$$

gdje je:

a — velika poluos Möhleove elipse pogrešaka,
b — mala poluos Möhleove elipse pogrešaka,
φ — smjerni kut velike poluosi elipse i
q_{xy}, q_{xx} i q_{yy} — elementi matrice $Q_{\hat{x}\hat{x}}$.

4. REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Mjerenja dužina obavljena su instrumentom Wild DI3000 br. 67896 na području planinskog gorja Mali atlas u Alžiru. Temperatura zraka prilikom mejrenja varirala je od 9 do 28,2° C. Zenitne daljine strana kreću se od 79 do 122 grada. Mjerene su u tri girusa elektroničkim teodolitom T 2000S i korigirane su za otklon vertikale.

4.1 Klasično izjednačenje mreže

Zbog općenito poznatog modela izjednačenja, navedena je samo funkcionalna veza i rezultat istraživanja. Funkcionalni model glasi:

$$s_{ij} + \hat{v}_{ij} = \sqrt{(\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2}. \qquad (4.1\text{-}1)$$

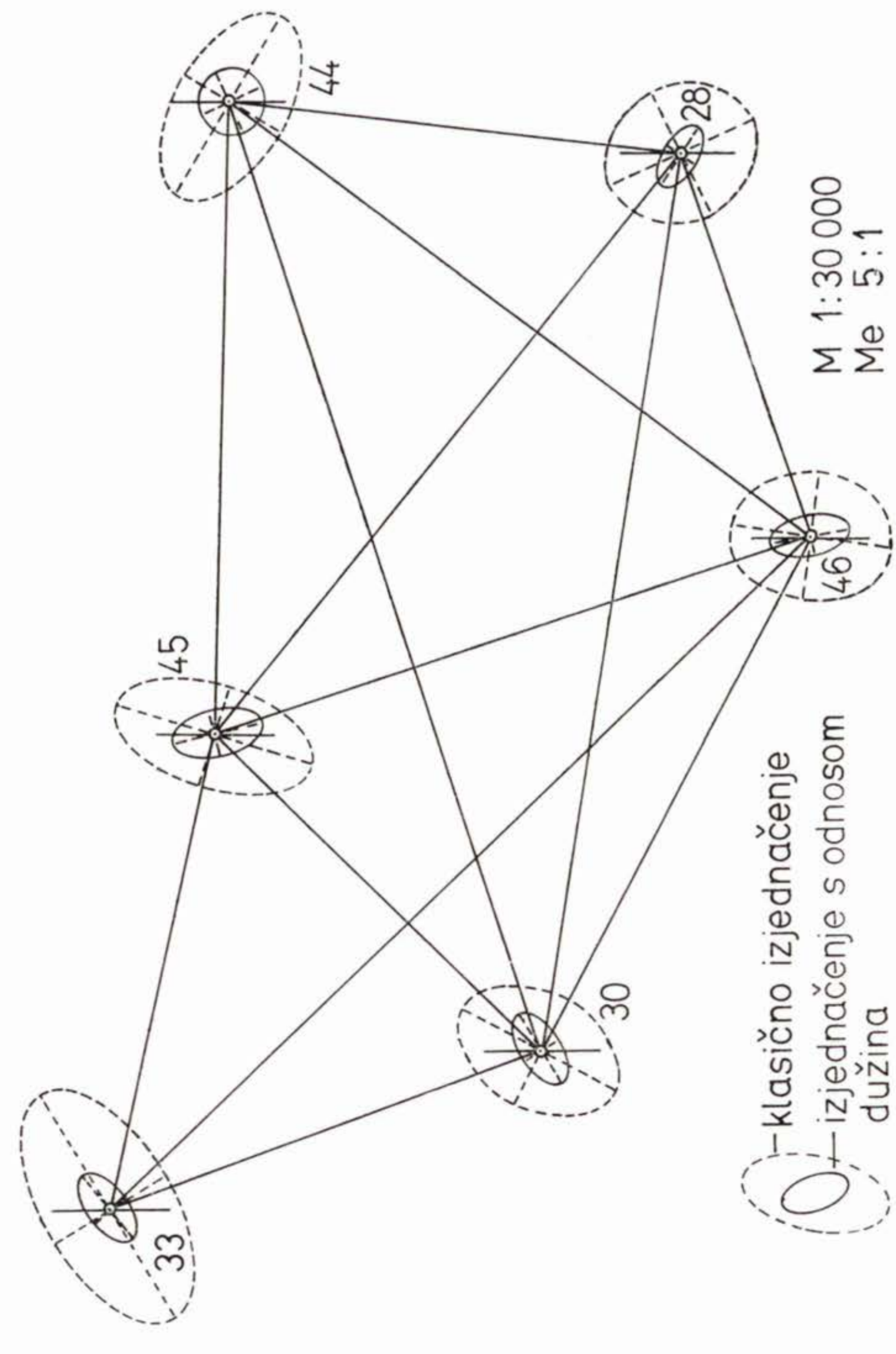
Elementi elipsi pogrešaka po Möhleu prikazani su grafički na sl. 2, a numerički u tablici 4.1-1.

Tablica 4.1-1: Elementi elipsi pogrešaka po Möhleu za izjednačenje na osnovu mjerenih dužina

Točka	Velika poluos [mm]	Mala poluos [mm]	Smjerni kut velike poluosi
30	2,92	2,14	28°, 211
46	2,78	2,15	8°, 088
28	2,76	2,36	155°, 121
44	3,44	2,23	120°, 953
45	3,52	2,14	15°, 843
33	4,38	2,42	59°, 574

4.2 Izjednačenje na osnovi odnosa dužina

Teorijski model detaljno je objašnjen u poglavlju 3, a rezultati numeričkih istraživanja prikazani su u tablici 4.2-1 i grafički na sl. 2. Ova ispitivanja provedena su na više mreža i dobiveni su isti zaključci o točnosti mreža. Jednadžbe popravaka postavljene su u svim kombinacijama odnosa dužina na stajalištu, analogno Schreiberovoj metodi mjerenja kutova. Istraživanja smo provodili i samo s odnosom susjednih dužina i krajnjih dužina, te smo dobili slične rezultate.


44
28
45
46
30
33
M 1:30 000
Me 5:1
klasično izjednačenje
izjednačenje s odnosom dužina

Sl. 2

Tablica 4.2-1: Elementi elipsi pogrešaka po Möhleu za izjednačenje s odnosom dužina

Točka	Velika poluos [mm]	Mala poluos [mm]	Smjerni kut velike poluosi
30	1,32	0,71	57°, 202
46	1,41	0,82	171°, 698
28	1,15	0,71	120°, 623
44	1,17	1,16	154°, 956
45	1,29	0,87	167°, 257
33	1,35	0,80	57°, 151

Izjednačenjem je dobivena procjena adicione konstante $\hat{c} = -0{,}24$ mm $\pm$ 1,26 mm. Ispitivanjima provedenim na bazi za komparaciju Geodetskog fakulteta, za isti instrument, dobivena je procjena adicione konstante — 1,2 mm.

5. ZAKLJUČAK

Na osnovi usporedbe rezultata izjednačenja (tablica 4.1-1 i 4.2-1) može se konstatirati da se izjednačenjem na osnovi odnosa dužina dobivaju rezultati s oko dvostruko manjim elipsama pogrešaka. Takvi se rezultati mogu očekivati, ukoliko instrument ima daleko veću pogrešku multiplikacione konstante u odnosu na pogrešku adicione konstante. Naši rezultati upućuju na to da i za veliku pogrešku adicione konstante u odnosu na pogrešku multiplikacione konstante (prema tvorničkim podacima) vrijedi analogan zaključak. To upućuje na slijedeće: da je proizvođač precijenio pogrešku adicione konstante, za ovaj instrument (DI 3000 br. 67896), za 5 mm i da meteorološki faktori nisu mjerenjem najbolje obuhvaćeni. Ispitivanja na kalibracionoj bazi Geodetskog fakulteta potvrđuju naše zaključke o pogrešnosti adicione konstante. Ovi rezultati su posebice od koristi u deformacijskoj analizi, zapravo, dobiva se povećanje točnosti i pouzdanosti.

6. ZAHVALA

Zahvaljujemo terenskoj ekipi, prvenstveno prof. dr. N. Solariću, inž. Z. Đumiću i figurantima, koji su se zajedno s prof. dr. A. Bilajbegovićem trudili da se ova mjerenja uspješno obave na terenu, a isto tako kolegici Jeleni Juršetić, dipl. inž., za numeričku obradu rezultata.

LITERATURA

Bilajbegović, A.: 1990: Viša geodezija, Rukopis, Zagreb 1990.

Mierlo, J. van 1986: redavanja održana na Institutu za geodeziju Građevinskog fakulteta u Beogradu.

Deutscher Verein für Vermessungswessen — Landsverein Baden—Württenberg: Mitteilungen, Sonderheft. Beurteilung geodätischer Netze, Stuttgart 1985.

COMPARISON OF METHODS FOR ADJUSTMENT OF TRILATERATION NETS MEASURED BY GEODIMETERS

The paper reports about the investigation of the model for the adjustment of trilaterations — classical functional relationship and functional relationship based on the ratio of distances. For the geodimeter DI3000, which according to the manufacturer's data has a standard deviation of measured distances of $\sigma_s = \pm (5 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$, i. e. which has the error of the additve constant about 5 times greater than the error of the stadia constant, the case of measuring meteorological parameters and taking onto account the corrections, has been considered in both methods of data treatment as well. Numerical results confirm no doubt the adventage of the adjustment based on the ration of distances, which is especially important for nets founded in oreder to survey movements of objects.

Primljeno: 1990-04-12