UDK 528.335.2:528.145
Originalni znanstveni članak

KORELACIJA PRI IZRAVNAVANJU POLIGONOMETRIJSKIH MREŽA PREKO ČVORNIH TAČAKA

Jovan STEVANOVIĆ — Beograd*

SAŽETAK: U radu je obrađena mogućnost uzimanja u obzir korelacije pri izravnavanju poligonometrijske mreže preko čvornih tačaka, pošto i koordinatne razlike i razlike direkcionih uglova zavise od merenih prelomnih uglova i dužina. Prvo je izložena teorijska koncepcija ovakvog izravnavanja. Zatim su, polazeći od jednog opštijeg primera, sledeći logiku matričnog računa, izvedeni zaključci kako se mogu formirati matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova mehanički, na osnovu skice poligonometrijske mreže, ako su prethodno formirane korelacione matrice za svaki vlak. Korelaciona matrica jednog vlaka praktično je jednaka matrici normalnih jednačina pri poznatom strogom uslovnom izravnavanju jednog vlaka. Za slučaj izravnavanja jedne čvorne tačke uveden je pojam vektorske aritmetičke sredine« koji se, ako nepoznate ne bi bile u korelaciji, pretvara u izravnavanje čvorne tačke uobičajenim približnim postupkom.

1. UVOD

U literaturi se može naći više principijelno objašnjenih mogućnosti strogog izravnavanja poligonometrijskih mreža, uz konstataciju da se sve one, zbog svojih komplikovanosti, retko primenjuju u praksi. Najčešće praktikovana metoda je približna metoda izravnavanja preko čvornih tačaka, kod koje se odvojeno izravnavaju uglovi a odvojeno koordinatne razlike po jednoj a zatim po drugoj koordinatnoj osi. Pravilnikom [3] predviđena je ova metoda. U situaciji kada se dužine poligonskih strana mere pantljikom sa tačnošću koju omogućuje pantljika, pomenuta približna metoda je svakako zadovoljavajuća. Ali, ako se dužine strana mere elektrooptičkim daljinomerima, ako su vlaci veće dužine, ako poligonometrijske mreže zamenjuju triangulaciju, kao i ako su vlaci nešto više izlomljeni, pomenuta približna metoda možda neće zadovoljiti. Uz prisustvo velikih računara koji omogućuju i vrlo komplikovana računanja, zbog svega navedenog, može biti umesna orijentacija na stroge metode kad je to korisno, što nalaže potrebu nešto bližeg razrađivanja strogih metoda i njihovih adaptacija da postanu što praktičnije.

U ovom radu će da bude prikazana mogućnost uzimanja u obzir korelacije ako se pođe od pomenutog približnog izravnavanja uglova i koordinatnih razlika. Ovim bi se u prvom redu dobile koordinate čvornih tačaka izravnate

* Prof. dr Jovan Stevanović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, Đušina 7

po strogoj metodi, a što bi omogućilo, ako je potrebno, da se relativno jednostavno, izravnaju i svi poligonski vlaci po strogoj metodi. Svakako, ovakav način prikaza problema je samo drugačiji vid interpretacije poznate metode kombinovanog uslovno-posrednog izravnavanja.

2. KOMBINOVANO USLOVNO-POSREDNO IZRAVNAVANJE POLIGONOMETRIJSKIH MREŽA

2.1 *Jednačine popravaka pri posrednom izravnavanju čvornih tačaka*

Poznate su relacije koje se odnose na jedan poligonski vlak razvučen između početne tačke P i završne tačke Z:

$$\begin{aligned} \sum_1^n \beta + v_\nu &= \nu_Z - \nu_P + n \cdot 180, \\ \sum \Delta y + v_y &= y_Z - y_P, \\ \sum \Delta x + v_x &= x_Z - x_P. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako su početna i završna tačka čvorne tačke, tada, pored nepoznatih popravaka v_ν, v_y i v_x, nepoznate su i početni direkcioni ugao ν_P, završni direkcioni ugao ν_Z kao i koordinate y_Z, y_P, x_Z i x_P. Ako se uvedu približne vrednosti, tj. ako je:

$$\begin{aligned} \nu_P &= \nu_{P_0} + \delta\nu_P, \\ \nu_Z &= \nu_{Z_0} + \delta\nu_Z, \\ y_P &= y_{P_0} + \delta y_P, \\ y_Z &= y_{Z_0} + \delta y_Z, \\ x_P &= x_{P_0} + \delta x_P, \\ x_Z &= x_{Z_0} + \delta x_Z, \end{aligned} \tag{2}$$

navedene jednačine popravaka mogu da se napišu u vidu

$$\begin{aligned} v_\nu &= \delta\nu_Z - \delta\nu_P + f\nu, \\ v_y &= \delta y_Z - \delta y_P + f_y, \\ v_x &= \delta x_Z - \delta x_P + f_x. \end{aligned} \tag{3}$$

Slobodni članovi bi bili:

$$\begin{aligned} f_\nu &= \nu_{Z_0} - \nu_{P_0} - (\textstyle\sum\beta \pm n \cdot 180) \\ f_y &= y_{Z_0} - y_{P_0} - \textstyle\sum \Delta y \\ f_x &= x_{Z_0} - x_{P_0} - \textstyle\sum \Delta x \end{aligned} \tag{4}$$

Jednačine (3), ako je u pitanju vlak »i«, mogu sa uobičajenim oznakama da se napišu u matričnom vidu:

$$v_i = A_i X_i + f_i \tag{5}$$

pri čemu je

$$X_i = [\delta\nu_P \, \delta y_P \, \delta x_P \, \delta\nu_Z \, \delta y_Z \, \delta x_Z]$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -1 & & & +1 & & \\ & -1 & & & +1 & \\ & & =1 & & & +1 \end{bmatrix} \qquad f_i = \begin{bmatrix} f_{\nu PZ} \\ f_{yPZ} \\ f_{xPZ} \end{bmatrix}$$

Za svaki poligonski vlak mora se postaviti po jedan sistem jednačina popravaka na naveden način, sa napomenom da, ako je neka — bilo početna bilo završna tačka — data tačka, odgovarajući koeficijenti u jednačinama popravaka biće jednaki nuli. Ako se za celu mrežu matrica koeficijenata obeleži sa A, vektor slobodnih članova sa f, vektor nepoznatih sa X a vektor popravaka sa V, biće:

$$V = AX + f \tag{6}$$

2.2 *Uslovne jednačine poligonskih vlakova*

Kao što je poznato za svaki poligonski vlak mogu se postaviti po tri uslovne jednačine. Ako se popravke merenih dužina i uglova obeleže sa e_{sk} i $e_{\beta l}$, uslovne jednačine pri strogom izravnavanju bi bile:

$$\begin{aligned} \sum e_{\beta l} + W_\beta &= 0 \\ \sum e_{sk} \sin \nu_{0k} + \sum \frac{e_{\beta l}}{\rho} \Delta x^z_{0l} + W_y &= 0 \\ \sum e_{sk} \cos \nu_{0k} - \sum \frac{e_{\beta l}}{\rho} \Delta y^z_{0l} + W_x &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Slobodni članovi u ovim uslovnim jednaćinama su:

$$\begin{aligned} W_\beta &= - /\nu_Z - \nu_P - (\sum \beta \pm n \cdot 180)/ = -v\,, \\ W_y &= - /y_Z - y_P - \sum \Delta y/ = -v_y, \\ W_x &= - /x_Z - x_P - \sum \Delta x/ = -v_x. \end{aligned} \tag{8}$$

Treba ukazati, s obzirom na jednačine (1), da su slobodni članovi u uslovnim jednačinama, po prirodi problema, jednaki odgovarajućim popravkama pri izravnavanju koordinata čvornih tačaka, sa obrnutim znakom.

Kada je u pitanju cela mreža, treba za svaki vlak formirati grupu od po tri uslovne jednačine navedenog oblika. Pošto merene veličine jednog vlaka ne ulaze u sastav jednačina ostalih vlakova, ove grupe uslovnih jednačina su međusobno nezavisne. Ako se matrica koeficijenata jednog vlaka obeleži sa C_i a matrica koeficijenata uslovnih jednačina cele mreže sa C, matrica C će biti kvazidijagonalna matrica komponovana od matrica C_i po glavnoj dijagonali. Ako se još za celu mrežu obeleže vektor popravaka sa e a vektor slobodnih članova sa W, uslovne jednačine bi bile:

$$C^T e + W = 0. \tag{9}$$

2.3 *Izravnanje mreže klasičnim postupkom*

Ako se pri izravnavanju zanemare uslovne jednačine (9), a izravnavanje obavi postupkom koji podrazumijeva samo navedene jednačine popravaka (6), kako je navedeno, dobiće se približni rezultati izravnavanja.

Ako se pak, obzirom na jednačine (3), (6) i (8), unesu popravke V kao slobodni članovi u uslovne jednačine (9), dobiće se:

$$C^T e - AX - f = 0. \tag{10}$$

U [2] je detaljnije objašnjen postupak ovakvog kombinovanog uslovno posrednog izravnavanja.

Normalne jednačine glase:

$$C^T P^{-1} CK - AX - f = 0, \tag{11}$$

$$-A^T K = 0, \tag{12}$$

gdje je:

P — matrica težina rezultata merenja,
K — vektor korelata.

Matrica $C^T P^{-1} C$ u jednačini (11) je, kao uvek kod normalnih jednačina, simetrična matrica. Ako bi se sistem normalnih jednačina (11) i (12) rešavao od jednom na uobičajen način, dobile bi se korelate K i priraštaji direkcionih uglova, odnosno koordinata čvornih tačaka — X. Međutim, ako se sistem normalnih jednačina (11) rešava u dve faze, tada se može uvesti oznaka:

$$Q = C^T P^{-1} C, \tag{14}$$

pa bi se posredstvom inverzne matrice Q^{-1} mogao sistem (11) rešiti po K:

$$K = Q^{-1} AX + Q^{-1} f. \tag{15}$$

Zamenom vektora K u (12) dobio bi se drugi sistem normalnih jednačina:

$$A^T Q^{-1} AX + A^T Q^{-1} f = 0 \tag{16}$$

ili sa novim oznakama:

$$NX + F = 0. \tag{17}$$

Na osnovu ove jednačine dobija se vektor nepoznatih:

$$X = -N^{-1}F \tag{18}$$

odnosno, preko jednačine (6) i vektor popravaka V. Na kraju, uzimajući u obzir jednačine (6) i (15), mogu se sračunati korelate:

$$K = Q^{-1}V = -Q^{-1}W. \tag{19}$$

Popravke merenih veličina u vlakovima dobiće se preko jednačine:

$$e = P^{-1}CK. \tag{20}$$

2.4 *Izravnavanje koordinata čvornih tačaka uopštenim principom najmanjih kvadrata*

Jednačine popravaka pri izravnavanju poligonometrijskih mreža učvoravanjem date su jednačinama (3) odnosno (5) i (6) sa navedenom matricom koeficijenata jednačina popravaka za jedan vlak. Nepoznate δ_v, δ_y i δ_x su međuzavisne i kao takve su u korelaciji sa korelacionom matricom Q. Ako se prevashodno žele koordinate čvornih tačaka po strogoj metodi, mora se poći od uopštenog principa najmanjih kvadrata za popravke v_{v_i}, v_{y_i} i v_{x_i} tj. treba da bude:

$$\varphi = v^T Q^{-1} v = \min. \tag{21}$$

Korelaciona matrica Q je kvazidijagonalna matrica komponovana po glavnoj dijagonali od niza nezavisnih matrica Q_i svakog vlaka. Za nalaženje inverzne matrice Q^{-1} treba invertovati matricu Q, a s obzirom na njen sastav ovo znači da treba invertovati pojedinačno matricu svakog vlaka Q_i. Matrica Q^{-1} biće takođe kvazidijagonalna matrica komponovana od matrica Q_i^{-1}. Funkcija φ imaće minimum ako je:

$$d\varphi = 2V^T Q^{-1} dV = 0 \tag{22}$$

odnosno s obzirom na jednačine (6):

$$V^T Q^{-1} A = 0 \tag{23}$$

ili transponovano:

$$A^T Q^{-1} V = 0 \tag{24}$$

Ako se ovde zameni V iz (6) dobiće se:

$$A^T Q^{-1} (AX + f) = 0 \tag{25}$$

i na kraju:

$$A^T Q^{-1} AX + A^T Q^{-1} = 0 \tag{26}$$

a ovo su već navedene normalne jednačine (16). Dalji postupak izravnavanja bi bio isti kako je navedeno posle jednačine (16).

3. PRAKTIČAN POSTUPAK IZRAVNAVANJA

Prema jednačinama (3) popravke jednog vlaka v_ν, v_y i v_x zavise od odgovarajućih priraštaja početne i završne tačke vlaka. Na osnovu navedene matrice koeficijenata jednačina (3), uočavamo da se ona sastoji od dve jedinične matrice i to za priraštaje početne tačke figurira -E a za priraštaje krajnje tačke +E. Ovaj zaključak omogućuje jednostavno formiranje matrice koeficijenta jednačina popravaka za celu poligonometrijsku mrežu. Slobodni članovi svakog vlaka f_ν, f_y i f_x računaju se preko jednačina (4). Biće korisno za kasnija objašnjenja za vektor slobodnih članova jednog vlaka, npr. vlaka »i«, uvesti oznaku f_i, tj.:

$$f_i^T = |f_{\nu_i}, f_{y_i}, f_{x_i}|. \tag{27}$$

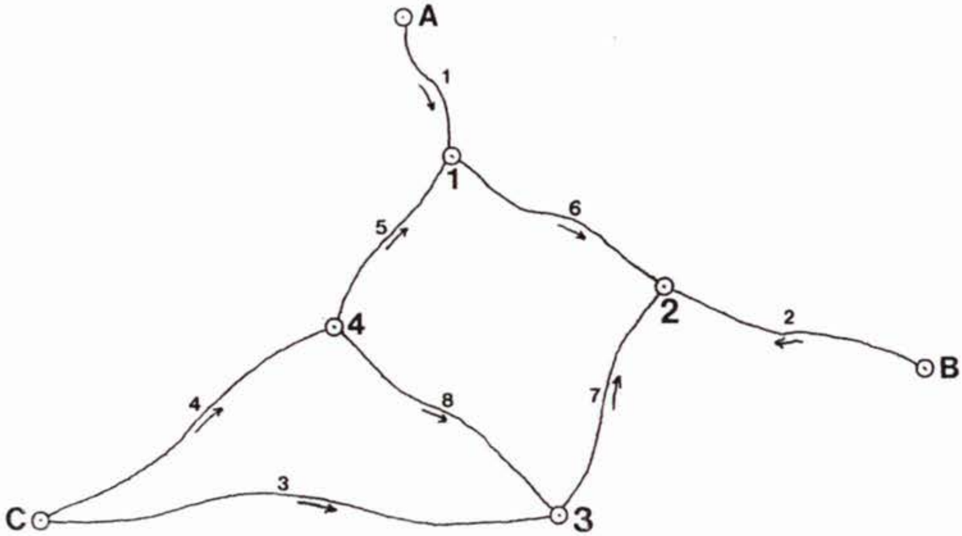
Vektor slobodnih članova za celu mrežu bi bio:

$$f^T = |f_1^T, f_2^T, \ldots, f_i^T \ldots|. \tag{28}$$

Preko jednačina (7) formiraju se uslovne jednačine svakog vlaka u potpunosti na isti način kao pri poznatom strogom izravnavanju poligonskog vlaka. Na osnovu uslovnih jednačina formiraju se normalne jednačine na uobičajen način. Matrica ovih jednačina je u sklopu ovog razmatranja nazvana »koreleciona matrica«. Ako se ova matrica odnosi na vlak »i«, biće obeležena sa Q_i. Inverzna matrica jednog vlaka bi bila Q_i^{-1}.

U sklopu navedenih objašnjenja, radi uočavanja odgovarajućih pravilnosti, poći ćemo od poligonometrijske mreže na sl. 1. Strelicama je naznačen smer računanja vlakova.

Ako su za svaki vlak sračunate korelacione matrice i njihove inverzne matrice Q_i^{-1}, formiranje normalnih jednačina bi se obavilo na način koji je shematski prikazan na sl. 2. U prostoru kompletne matrice Q^{-1} naznačeni su samo redovi i kolone, odnosno mesta za pojedine članove matrice, a na odgovarajuće mesto upisan je samo simbol Q_i^{-1}, koji podrazumeva matricu vlaka. U matrici jednačina popravaka A upisani su članovi +1 i —1, a bledom bojom je preko upisan simbol E za svaku jediničnu matricu. U matrici A^T je na odgovarajućim mestima upisan samo simbol E. Sa ovako unetim podacima je prema poznatoj shemi obavljeno množenje odgovarajućih matrica da bi se do-



Sl. 1. Strelicama je naznačen smer računanja vlakova

bile normalne jednačine. Budući da je proizvod jedinične matrice i matrice jednak samoj matrici, u matrici proizvoda A^TQ^{-1}, na odgovarajućim mestima, upisani su ovakvi proizvodi koji iznose Q_i^{-1} sa znakom plus ili znakom minus. Dalje iz procesa množenja matrica A^TQ^{-1} i matrice A, tj. na osnovu dobivene matrice proizvoda $A^TQ^{-1}A$, možemo da izvedemo sledeće zaključke o načinu dobijanja matrice normalnih jednačina:

a) Dijagonalne blok-matrice, koje odgovaraju nepoznatim tačke »j«, dobivaju se sabiranjem matrica Q_i^{-1} svih vlakova koji se sustiču u tu tačku. U navedenom prilogu u indeksu su naznačeni brojevi matrica koje su sabrane.

b) Blok-matrica između dveju tačaka koje spaja vlak »i« jeste $-Q_i^{-1}$.

c) Članovi blok-matrica između tačaka koje nisu povezane vlakovima jednaki su nuli.

Množenje matrice A^TQ^{-1} vektorom f, koji je prema ranijem objašnjenju raščlanjen na vektore f_i, daće vektor F. Ako se vektor F raščlani na tročlane vektore F_j, pri čemu svaki vektor F_j odgovara jednoj čvornoj tački, za navedenu mrežu biće:

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_1^{-1}f_1 + Q_5^{-1}f_5 - Q_6^{-1}f_6, \\ F_2 &= Q_2^{-1}f_2 + Q_6^{-1}f_6 + Q_7^{-1}f_7, \\ F_3 &= Q_3^{-1}f_3 - Q_7^{-1}f_7 + Q_8^{-1}f_8, \\ F_4 &= Q_4^{-1}f_4 - Q_5^{-1}f_5 - Q_8^{-1}f_8, \end{aligned} \tag{29}$$

a sam vektor F bi bio:

$$F^T = |F_1^T, F_2^T, F_3^T, F_4^T|. \tag{30}$$

S obzirom na to, može se zaključiti da će se vektor slobodnih članova normalnih jednačina sastojati od tročlanih vektora koji se odnose na jednu tačku, dobivenih preko proizvoda:

$$F_j = \Sigma\, Q_i^{-1} f_i \tag{31}$$

pri čemu »i« uzima vrednost brojeva svih vlakova koji se sutiču u tu čvornu tačku, i to za vlakove koji se računaju ka toj tački sa znakom plus, a za vlakove koji se računaju od te tačke sa znakom minus. Indeks »j« uzima vrednost brojeva čvornih tačaka.

Rešavanje normalnih jednačina obavilo bi se uobičajenim postupcima.

4. RAČUANJE KOORDINATA JEDNE ČVORNE TAČKE I VEKTORSKA ARITMETIČKA SREDINA

S obzirom na sve navedeno, a kako se pri računanju jedne čvorne tačke vlaci računaju uvek ka njoj, normalne jednačine bi bile:

$$(\sum Q_i^{-1})\, X = \sum (Q_i^{-1} f_i) \tag{32}$$

Vektor nepoznatih δ_ν, δ_y i δ_x, koji je i ovde označen sa X, bio bi:

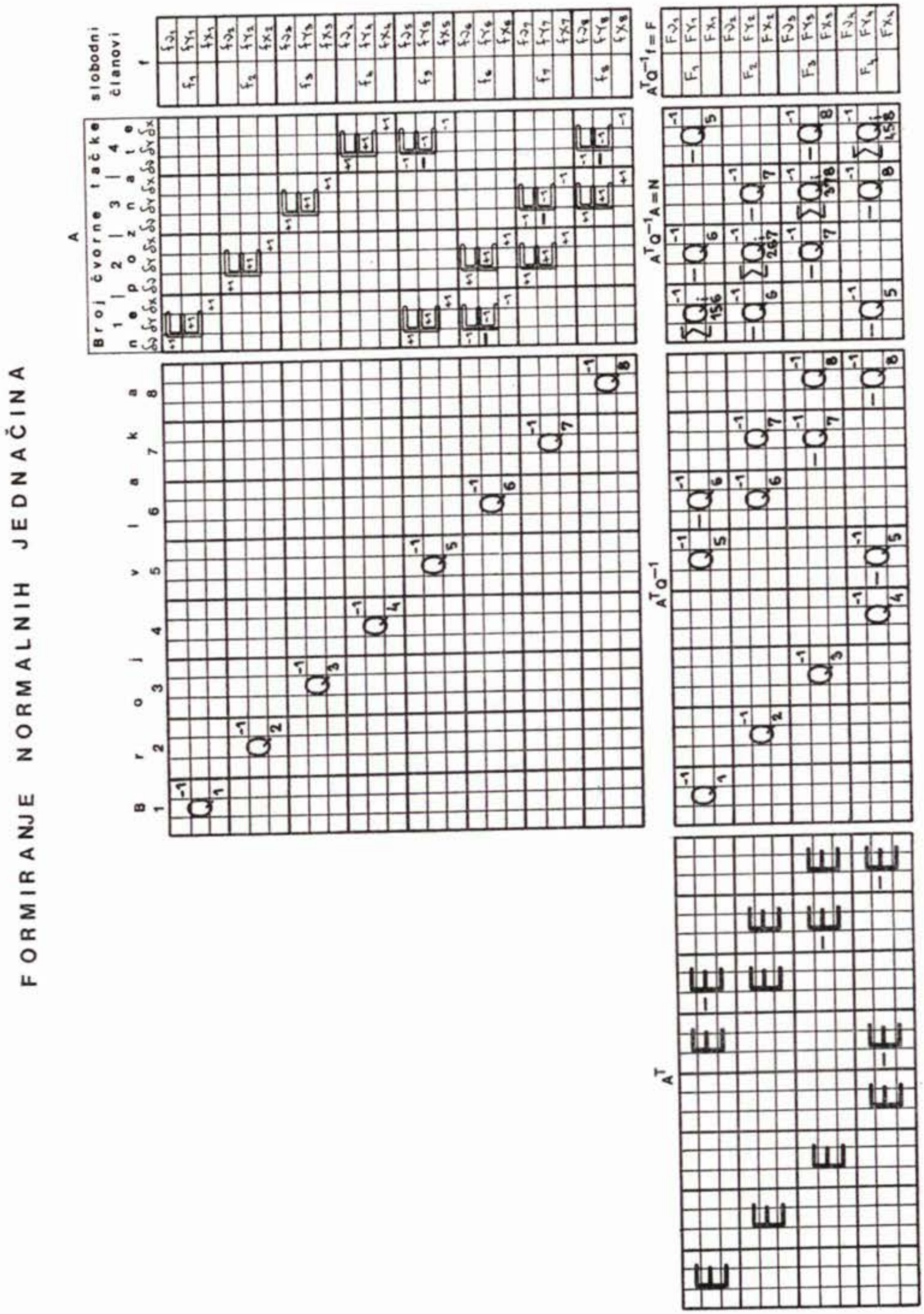
$$X = (\sum Q_i^{-1})^{-1} \sum (Q_i^{-1} f_i). \tag{33}$$

Može se uočiti shematska sličnost ove jednačine i poznatog postupka računanja koordinata čvorne tačke približnim postupkom. Upravo, ako je korelaciona matrica dijagonalna matrica, strogi postupak se pretvara u klasični postupak.

S obzirom na već postojeće termine prosta i opšta aritmetička sredina, kao i na korišćen termin u [4] uopštena aritmetička sredina, možda bi bilo umesno ovaj slučaj strogog izravnavanja čvorne tačke i šire, slične slučajeve nazvati »vektorska aritmetička sredina«. Treba napomenuti da korelacija kod uopštene aritmetičke sredine proizlazi iz međuzavisnosti merenja, dok kod »vektorske aritmetičke sredine« korelacija proizlazi iz međuzavisnosti nepoznatih.

LITERATURA

[1] Jordan — Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, zweiter Band, Stuttgart 1950, 606—608.
[2] Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Zagreb 1967, 241—244.
[3] Pravilnik za državni premer, II-A deo, Svezna geodetska uprava, Beograd 1956.
[4] Mihajlović, K.: Geodezija II, II deo, Beograd 1982, 340—342.


FORMIRANJE NORMALNIH JEDNAČINA
A
Broj čvorne tačke
nepoznate
slobodni članovi
f
Broj vlaka
A^T Q^-1 f = F
A^T Q^-1 A = N
A^T Q^-1
A^T

Sl. 2

CORELATION IN ADJUSTMENT OF MINOR CONTROL NETWORKS BY NODAL POINTS

The paper deals with a possibility of taking into account correlations in adjustment of a minor control network by the method of nodal points since both the coordinate differences and the differences of directional angels depend on measured refractive angels and lengths. First, the theoretic conception of such adjustment has been explained. Then, starting from a more general example, and following the logic of matrix calculation, conclusions were derived speaking how to form the matrix of normal equations and the vector of free terms mechanically, on the basis of a sketch of the minor control net, supposing that the correlation matrices were formed for each traverse beforehand. The correlation matrix of a single traverse is practically equal to the matrix of normal equations in known severe conditional adjustment of the traverse. In the case of adjustment of one nodal point, a notion vectorial arithmetic mean« is introduced which, when the unknowns are not in correlation, would be converted into adjustment of the nodal point by the usual approximate method.

Primljeno: 1990—02—26