UDK 532
Originalni znanstveni članak

JEDNA KONCEPCIJA PRISTUPA EKSPLICITNOM ISKAZIVANJU DARCYEVA KOEFICIJENTA ZA PRIJELAZNO PODRUČJE NA NIKURADZEOVIM DIJAGRAMIMA

Rudolf MIŠIĆ — Zagreb*

SAŽETAK: Na osnovi studijske analize Nikuradzeovih dijagrama za prijelazno područje i uvođenjem određenih pretpostavki dobivene su parametarske jednadžbe, koje omogućuju da se Darcyev koeficijent iskaže eksplicitno, u formi koja je u skladu sa zahtijevom dimenzionalne analize o dimenzionalnoj strukturi fizikalnih zakonitosti.

1. UVOD

Za prijelazno područje na Nikuradzeovim dijagramima zna se da vrijednost Darcyeva koeficijenta ovisi o Reynoldsovu broju i relativnoj hrapavosti stijenki. Prema dimenzionalnoj analizi ta se ovisnost izražava kao:

$$\lambda = k \cdot Re^x \cdot \left(\frac{e}{r}\right)^y, \tag{1}$$

gdje je:

Re — Reynoldsov broj

$\frac{e}{r}$ — relativna hrapavost stijenki

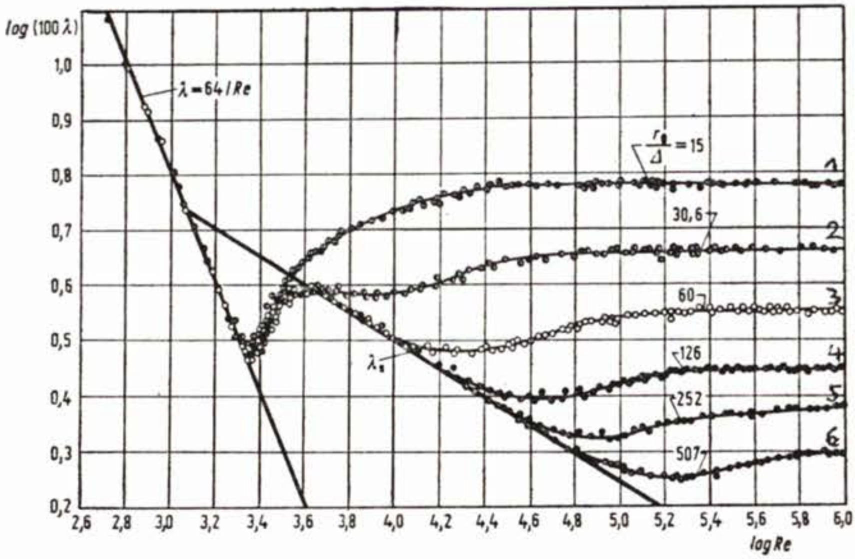
k — numerički faktor

U ovom radu pokušat će se λ iskazati konkretno u formi koju nalaže relacija (1).

Nikuradzeovi dijagrami, kao faktografski materijal, posebno će se analizirati, pa se zato na samom početku daje popis oznaka i značenja koja će u tekstu dolaziti.

— Numeracija dijagrama: dijagrami će se numerirati brojevima od 1 do 6, kao što je označeno na sl. 1, i označavati s N_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
— Pravac koji na sl. 1 iskazuje λ prema Blasiusovoj formuli nazivat će se: Blasiusov pravac.

* Prof. dr. Rudolf Mišić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26



Sl. 1

— $\frac{e}{r} = H$ oznaka relativne hrapavosti

— $\log \frac{e}{r} = h$

— $\log Re = \rho$

— A_i točke izlaska iz Blasiusova pravca

— B_i točke ekstrema na dijagramima u prijelaznom području

— C_i točke ulaska u područje kvadratičnog otpora

— ρ_{ri} relativna vrijednost ρ_i računana od A_i

— $z = \log (100\ \lambda)$.

2. PRETPOSTAVKE

Isključi li se dijagram N_1 i donekle N_2, odmah se uočava da ostali dijagrami (N_3, N_4, N_5, N_6) pokazuju međusobnu sličnost.

Na osnovi te analogije pretpostavit će se sada da se u homolognim točkama na dijagramima iskazuje ista fizikalna stvarnost. To bi značilo da za te točke bude u relaciji (1):

$$x = \text{idem},$$
$$y = \text{idem},$$
$$k = \text{idem}.$$

Da bi se tokovi N-dijagrama što vjernije iskazali relacijom (1), odnosno da se x, y, k što bolje iskažu kao funkcije od ρ, trebalo bi za neke homologne točke unaprijed znati vrijednosti x, y, k, pa bi se onda interpolacijom dobile određene aproksimacije funkcija

$$x = x(\rho_r),$$
$$y = y(\rho_r),$$
$$k = k(\rho_r). \qquad (2)$$

Međutim, ti su podaci poznati samo za dvije točke; to su:
— točka odvajanja od Blasíusova pravca,
— točka ulaza u područje potpuno razvijene turbulencije

tj.

$$\lambda = 0{,}316 \cdot Re^{-\frac{1}{4}} \qquad \text{točka A}$$

$$\lambda = 0{,}145 \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{točka C}$$

(v. [2]).

Očito je da se samo s podacima tih dviju točaka ne može doći do neke smislene interpolacije funkcija (2). Neophodno je, dakle, da se utvrdi barem još jedna homologna točka između početka i kraja područja koje se ovdje razmatra.

Kao posebno karakteristična takva je točka svakako točka ekstrema na N-dijagramu, pa će se sada pokušati utvrditi za nju pripadne vrijednosti x, y, k.

3. ODREĐIVANJE x, y, k U EKSTREMNIM TOČKAMA NA N-DIJAGRAMIMA

Kao osnova pokušaju da se odrede vrijednosti x, y, k u ekstremnim točkama služit će numerički podaci s N-dijagrama, iskazani u tablici 1.

Može se uzeti da u bliskom okolišu ekstremnih točaka na dijagramima (sl. 1) neće z biti ovisno o ρ. Drugim riječima, u tim točkama λ ne ovisi o Reynolsovu broju, što znači da je tada x = O. Unese li se to značenje za x u relaciju (1), bit će

$$\lambda = k \cdot \left(\frac{e}{r}\right)^{y},$$

ili

$$\lambda = k \cdot H^{y}. \qquad (3)$$

Pomnoži li se (3) sa 100 i zatim logaritmira, dobit će se

$$\log(100\,\lambda) = 2 + \log k + y \cdot \log H$$

Tablica 1

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
ρ	z	z	z	z	z	z
3,50						
3,55	0,618					
3,60	0,648					
3,65	0,662	0,594				
3,70	0,676	0,594				
3,75	0,691	0,591				
3,80	0,700	0,588				
3,85	0,711	0,587				
3,90	0,721	0,585	0,525			
3,95	0,729	0,585	0,517			
4,00	0,737	0,588	0,505			
4,05	0,744	0,591	0,497			
4,10	0,751	0,596	0,491	0,483		
4,15	0,755	0,602	0,487	0,466		
4,20	0,762	0,604	0,486	0,454		
4,25	0,766	0,615	0,481	0,443		
4,30	0,768	0,621	0,481	0,431		
4,35	0,771	0,628	0,483	0,423		
4,40	0,775	0,636	0,483	0,419		
4,45	0,778	0,640	0,487	0,402		
4,50	0,781	0,643	0,490	0,401	0,375	
4,55	0,778	0,647	0,495	0,397	0,361	
4,60	0,781	0,650	0,499	0,394	0,350	
4,65	0,778	0,652	0,509	0,393	0,343	
4,70	0,780	0,652	0,513	0,394	0,338	
4,75	0,779	0,654	0,518	0,397	0,331	0,308
4,80	0,779	0,654	0,526	0,397	0,328	0,300
4,85	0,778	0,656	0,531	0,405	0,324	0,292
4,90	0,781	0,655	0,535	0,409	0,323	0,283
4,95	0,782	0,658	0,538	0,415	0,323	0,275
5,00	0,782	0,656	0,540	0,422	0,324	0,267
5,05	0,781	0,655	0,544	0,427	0,330	0,263
5,10	0,781	0,657	0,546	0,430	0,337	0,257
5,15	0,781	0,658	0,548	0,435	0,341	0,254
5,20	0,781	0,657	0,548	0,439	0,347	0,252
5,25		0,661	0,550	0,442	0,352	0,251
5,30		0,658	0,548	0,445	0,354	0,252
5,35		0,658	0,550	0,445	0,356	0,255
5,40		0,658	0,550	0,445	0,360	0,259
5,45				0,443	0,361	0,263
5,50				0,443	0,363	0,268
5,55				0,445	0,364	0,271
5,60				0,446	0,365	0,274
5,65				0,445	0,365	0,281
5,70					0,368	0,284
5,75					0,369	0,287
5,80					0,369	0,289
5,85					0,369	0,292
5,90						0,292
5,95						0,294
6,00						0,293

ili

$$z = 2 + \log k + h \cdot y.$$

Kako to vrijedi za ekstrem bilo kojeg N_i — dijagrama (i = 3, 4, 5, 6), može se napisati

$$z_i = 2 + \log k + h_i \cdot y, \tag{4}$$

pri čemu je, prema ranije rečenom, k = idem i y = idem, tj. nezavisno od i.

Da se (4) iskaže konkretno, iz tablice 1 se očitavaju koordinate (ρ, z) u ekstremnim točkama i ti se podaci unose u tablicu 2, koja će sadržavati i vrijednosti h, Δz, Δh, $\frac{\Delta z}{\Delta h}$, pri čemu su

$$\Delta z = z_i - z_j$$
$$\Delta h = h_i - h_j$$

razlike susjednih pripadnih veličina.

Tablica 2

	ρ	z	h	Δz	Δh	$\frac{\Delta z}{\Delta h}$
N_2	3,900	0,585	−1,486			
N_3	4,300	0,481	−1,778	−0,104	−0,292	(0,356)
N_4	4,650	0,393	−2,100	−0,088	−0,322	0,273
N_5	4,950	0,323	−2,401	−0,070	−0,301	0,233
N_6	5,250	0,251	−2,705	−0,072	−0,304	0,237

Pri tome je očigledno (jer je ovdje k = idem i y = idem) da će prema (4) biti

$$z_i - z_j = (h_i - h_j)\, y,$$

tj.

$$\Delta z_{ij} = y \cdot \Delta h_{ij},$$

odnosno

$$y = \frac{\Delta z_{ij}}{\Delta h_{ij}}. \tag{5}$$

Iz tablice 2 vidi se da se, osim za $\frac{\Delta z_{23}}{\Delta h_{23}}$, vrijednosti tih kvocijenata dosta dobro podudaraju, pa će srednja vrijednost za preostala tri kvocijenta biti 0,248, što će se zaokružiti na vrijednost

$$y = 0,25.$$

Sličnim postupkom naći će se sada i vrijednost za k. Ako se, naime, iz relacije (4) eksplicitno izrazi log k, dakle

$$\log k = (z_i - 2) - h_i \cdot y$$

i pripadne vrijednosti unesu u tablicu 3, vidi se da za k izlaze podudarne vrijednosti, tj.

$$k = 0,084$$

Tablica 3

	z	z − 2	h	h y	log k	k
	0,481	−1,519	−1,778	−0,445	−1,074	0,084
	0,393	−1,607	−2,100	−0,525	−1,082	0,083
	0,323	−1,677	−2,401	−0,600	−1,077	0,084
	0,251	−1,749	−2,705	−0,676	−1,073	0,085

S tako dobivenim vrijednostima za y i k izlazi da će, u skladu s (3), u ekstremnm točkama N-dijagrama, vrijediti relacija

$$\lambda = 0,084 \cdot H^{0,25}. \tag{6}$$

4. ZADATAK INTERPOLACIJE

Na Nikuradzeovim krivuljama (N_3 do N_6) sada su tri točke u razmatranom (prijelaznom) području za koje su dati podaci za x, y, k. To su točke (sl. 2) A_i, B_i, C_i (i = 3, 4, 5, 6). Za ulazne točke A_i vrijedi još Blasiusova formula

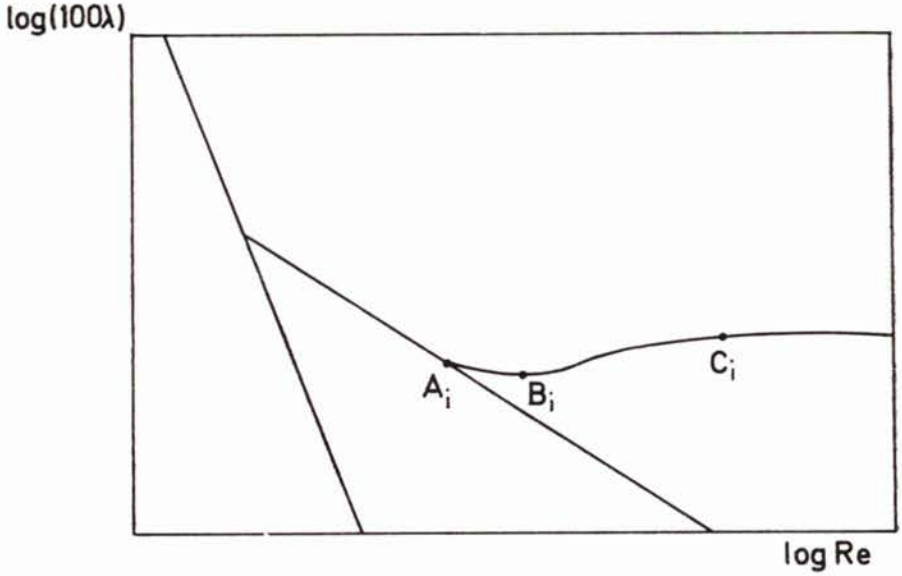
$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-\frac{1}{4}}$$

Za izlazne točke bit će

$$\lambda = 0,145 \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{1}{3}},$$

a za ekstremne točke (kao što je prethodno pokazano):

$$\lambda = 0{,}084 \left(\frac{e}{r}\right)^{\frac{1}{4}}.$$



Sl. 2

Prema tome, podaci za strukturu (1), za spomenute točke, bit će

$$x_A = -0{,}25, \quad x_B = 0, \quad x_C = 0,$$
$$y_A = 0, \quad y_B = 0{,}25, \quad y_C = 0{,}333,$$
$$k_A = 0{,}316, \quad k_B = 0{,}084, \quad k_C = 0{,}145,$$

pri čemu su, na osnovi iznijete pretpostavke o istoj fizikalnoj stvarnosti u homolognim točkama, navedene vrijednosti za x, y, k neovisne o indeksu (i) razmatranih N-krivulja.

Zadatak koji se sada postavlja jest da se u promatranom području pokuša doći do toka vrijednosti x, y, k kao funkcija od ρ_r, dakle do parametarskih jednadžbi (2).

Polazi se od osnovne relacije (1)

$$\lambda = k \cdot Re^x \cdot H^y,$$

odnosno pripadnim logaritmiranjem dobivene

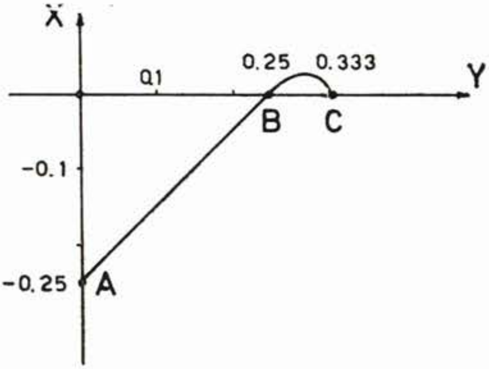
$$z = 2 + \log k + \rho x + h \cdot y. \tag{7}$$

Za bilo koju homolognu točku na dvjema N-krivuljama bit će iste vrijednosti za x, za y i za k, pa će razlika Δz biti

$$\Delta z = \Delta \rho \cdot x + \Delta h \cdot y, \tag{8}$$

gdje su Δz, $\Delta \rho$ i Δh pripadne vrijednosti razlika za promatrane dvije krivulje.

Za točke A, B, C mogu se spomenute poznate vrijednosti za x i y iskazati u koordinatnom sistemu (sl. 3).



Sl. 3

Zadatak je sada utvrditi takvu interpolaciju krivulje kroz A, B, C koja će dati najbolje tražene rezultate. Ispitivanje nekoliko varijanti interpolacije pokazalo je da se najpovoljniji rezultati dobivaju pri varijanti gdje je AB pravac, a dio BC parabola s priklonim kutom tangente u B, istim što ga ima pravac AB (tj. $\alpha = 45°$).

Prema tome, za područje AB (vidi sl. 3) bit će

$$x = y - 0{,}25, \tag{9}$$

a za područje BC lako se utvrđuje da je

$$x = -12{,}0725\, y^2 + 7{,}0362\, y - 1{,}0046. \tag{10}$$

Da bi se sada mogle iskazati vrijednosti x i y za svaku točku na N-dijagramima treba utvrditi parametarske jednadžbe (2). Postupak njihova određivanja teći će na slijedeći način.

Za promatranu krivulju N_3 (koja će se uzeti kao reprezentativna) odredit će se iz slike 1 (odnosno iz tablice 1) vrijednost ρ za A. Dobiva se $\rho = 3{,}90$. Slično se utvrđuje točka ekstrema B kod $\rho = 4{,}30$. Prema tome, interval od A do B karakteriziran je pripadnim intervalom $\Delta\rho = \rho_B - \rho_A = 0{,}40$.

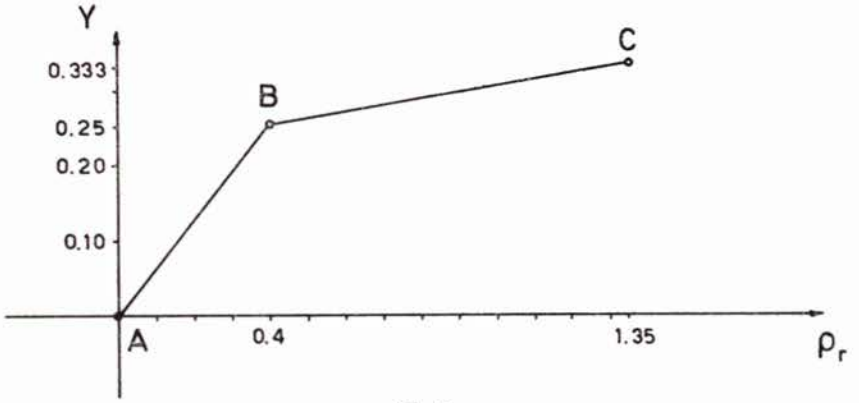
Analogno, intervalu BC odgovara $\rho_C - \rho_B$. Kako je za N_3 završna točka C pri $\rho = 5{,}25$, bit će

$$\rho_C - \rho_B = 5{,}25 - 4{,}30 = 0{,}95.$$

Uvođenjem relativnih vrijednosti za ρ, tj. računanih od ulazne točke A, bit će

za točku A $\rho_r = 0$
za točku B $\rho_r = 0{,}40$
za točku C $\rho_r = 1{,}35.$

Za određivanje parametarskih jednadžbi (2) polazi se od jednostavne postavke da je y linearno zavisno od ρ_r (sl. 4), a parametarske jednadžbe $x = x(\rho)$ dobit će se potom u skladu s (9) i (10).



Sl. 4.

Određuje se, dakle, prvo

$$y = y\,(\rho_r).$$

Iz slike 4 vidi se da je:

— za područje A—B

$$y = \frac{0{,}25}{0{,}40}\,\rho_r,$$

odnosno

$$y = 0{,}625\,\rho_r. \tag{11}$$

Povezivanjem, dalje, (11) s (9), tj.

$$y = 0{,}625$$

i

$$x = y - 0{,}25$$

dobit će se

$$x = 0,625\,\rho_r - 0,25; \tag{12}$$

— za područje B—C

$$y = 0,25 + \frac{0,333 - 0,250}{0,95}(\rho_r - 0,40),$$

tj.

$$y = 0,087\,\rho_r + 0,215 \tag{13}$$

Vezom (13) s (10), tj.

$$y = 0,087\,\rho_r + 0,215$$

i

$$x = -12,0725\,y^2 + 7,0362\,y - 1,0046$$

izlazi da je

$$x = -0,091\,\rho^2 + 0,160\,\rho_r - 0,050. \tag{14}$$

S tako određenim parametarskim jednadžbama (11), (12), (13), (14) računat će se sada y i x u intervalima od 0,05 vrijednosti argumenta ρ_r. Nakon toga će se, prema formuli

$$\log k = (z_N - 2) - \rho x - hy,$$

izračunati tok vrijednosti za numerički koeficijent k, pri čemu se za x i y uzimaju prethodno dobivene vrijednosti iz parametarskih jednadžbi, a pripadni Z_N se iz sl. 1 izravno očitavaju za dijagram N_3 (naravno, sa $h = h_3$).

Sav taj tok vrijednosti za x, y, k pregledno je dat u tablici 4.
Ta tablica je ujedno završni rezultat ovog istraživanja. Njezinom primjenom na slučajeve relativne hrapavosti koji se odnose na dijagrame N_4, N_5, N_6 pokazuje se da srednja odstupanja (za čitav tok nepotpuno razvijene turbulencije) izračunatih vrijednosti λ u odnosu na stvarne vrijednosti λ_N (iz N-dijagrama) iznose:

za N_4	0,95%
za N_5	1,55%
za N_6	2,20%

što je sasvim zadovoljavajuće.

Razmotri li se još i N_2, gdje je to odstupanje 5,90%, može se na kraju, zaključiti da iznesena metoda daje zadovoljavajuće rezultate za slučajeve relativne hrapavosti od $\frac{1}{30,6}$ do $\frac{1}{507}$.

Tablica 4

ρ_r	x	y	k
0,00	−0,250	0,000	0,316
0,05	−0,219	0,031	0,274
0,10	−0,188	0,063	0,234
0,15	−0,156	0,094	0,198
0,20	−0,125	0,125	0,168
0,25	−0,094	0,156	0,143
0,30	−0,063	0,188	0,122
0,35	−0,031	0,219	0,100
0,40	0,000	0,250	0,084
0,45	0,004	0,254	0,083
0,50	0,007	0,259	0,082
0,55	0,010	0,263	0,081
0,60	0,013	0,267	0,081
0,65	0,016	1,272	0,081
0,70	0,017	0,276	0,082
0,75	0,019	0,280	0,083
0,80	0,020	0,285	0,084
0,85	0,020	0,289	0,086
0,90	0,020	0,293	0,089
0,95	0,020	0,298	0,092
1,00	0,019	0,302	0,095
1,05	0,018	0,306	0,098
1,10	0,016	0,311	0,103
1,15	0,014	0,315	0,108
1,20	0,011	0,319	0,114
1,25	0,008	0,324	0,121
1,30	0,004	0,328	0,129
1,35	0,000	0,332	0,138

Važno je samo da se za svaki razmatrani slučaj što točnije odredi vrijednost ρ pri izlasku iz Blasiusova pravca, dakle početak odbrojavanja ρ_r.

LITERATURA

[1] Agroskin, Dimitrijev, Pikalov: Hidraulika, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.
[2] Mišić, R.: Prijedlog za jednu dimenzionalno prikladnu formulu za koeficijent gubitka tlaka pri razvijenom turbulentnom toku u cijevima s umjetno ohrapavljenim stijenkama, Zbornik radova Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Niz A, Svezak br. 27, Zagreb 1981.

* Metoda preciznijeg utvrđivanja vrijednosti ρ za izlaznu točku A bit će iznesena u posebnom članku, u kojem će se dati i grafički prikazi parametarskih jednadžbi, te aplikacija iznesene metode na konkretne slučajeve.

AN APPROACH TO EXPLICIT EXPRESSION OF THE DARCY'S COEFFICIENT IN THE TRANSITIONAL AREA OF NIKURADZE'S DIAGRAMS

Analysis of Nikuradze's diagrams for the transitional area, combined with the introduction of certain postulates, results in parametric equations which makes it possible to express Darcy's coefficient explicitly, in the form which is in accordance with the principles of dimensional analysis of dimensional structure of physical laws.

Primljeno: 1990-05-13