UDK 528.232.21
Originalni znanstveni članak

DULJINA LUKA MERIDIJANA

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK: U radu se razmatra računanje duljine luka meridijana primjenom trigonometrijskih redova. Posebno se naglašava da je koeficijente tih redova, koji se također obično prikazuju kao redovi, mnogo pogodnije izražavati pomoću parametra n, umjesto uobičajenih e ili e'. Ispituju se razni oblici trigonometrijskih redova s ciljem smanjenja količine potrebnih računskih operacija, imajući u vidu ovisnost točnosti računanja duljine luka meridijana o točnosti poznavanja geografske širine, kao i utjecaj zanemarivanja pojedinih članova redova. Na osnovi provedenih istraživanja predlaže se novi oblik formule za računanje duljine luka meridijana.

1. RAČUNANJE DULJINE LUKA MERIDIJANA

Poznato je da se izraz za diferencijal duljine luka meridijana na rotacijskom elipsoidu može napisati u obliku

$$ds_m = a\,(1 - e^2)\,(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}\, d\varphi, \tag{1}$$

gdje su: a velika poluos elipsoide, e prvi ekscencitritet i φ geografska širina točke. Izraz (1) nije moguće izravno integrirati (radi se o tzv. nepotpunom eliptičkom integralu III. vrste), pa se primjenjuju razvoji u redove trigonometrijskih funkcija, kao npr.

$$ds_m = a\,(1 - e^2)\,(A - B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi - D \cos 6\varphi + \ldots)\, d\varphi, \tag{2}$$

gdje se koeficijenti obično prikazuju kao redovi potencijala od e:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \ldots$$

---

* Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \ldots \tag{3}$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3645}{65536}e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{693}{131072}e^{10} + \ldots$$

U literaturi se, gotovo redovito, daju formule za koeficijente uz trigonometrijske funkcije geografske širine u obliku beskonačnih redova potencija ekscentriciteta e ili e′ (Svečnikov 1953, Borčić 1955, Hristov 1957, Jordan, Eggert, Kneissl 1958, Hirvonen 1969, Živković 1972, Čubranić 1974, Borčić 1976, Großmann 1976, Jackson 1978, Edoga 1981, Muminagić 1981, Snyder 1982, Jovanović 1983, Haimov 1984, Heitz 1988). Napomenimo usput da se numeričke vrijednosti koeficijenata ponekad daju u neskladu sa spomenutim razvojima. Tako npr. u (Borčić 1955) i (Jovanović 1983) imamo razvoje do članova sa e^6, iz kojih su izračunate numeričke vrijednosti koeficijenata na 15 decimala!?, iako zanemarivanje članova sa e^8 osigurava samo 8 točnih znamenaka iza decimalnog zareza.

Zanimljivo je da je prije više od stotinu godina Helmert uočio da se isti koeficijenti mogu prikazati i u obliku beskonačnih redova potencija raznih drugih parametara, ovisno o kojima spomenuti redovi konvergiraju brže ili sporije. Helmert je također ukazao na činjenicu da je za istu točnost najbolje ako se koeficijenti prikažu pomoću redova potencija parametra n (Helmert 1880), koji je u poznatom odnosu

$$e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} \tag{4}$$

prema ekscentricitetu e. Ti isti razvoji po potencijama od n potječu još od Bessela iz 1837. god., a pojavljuju se i kasnije, ali dosta rijetko, kao npr. u (Krüger 1912, Morozov 1969, Hirvonen 1970, Lenzmann 1985).

Uz supstituciju (4) i primjenu osnovnih trigonometrijskih identiteta, izraz (1) može se transformirati u

$$ds_m = a(1-n)(1-n^2)(1+2n\cos 2\varphi + n^2)^{-3/2}\, d\varphi. \tag{5}$$

Uočimo da je funkcija

$$f(\varphi) = (1+2n\cos 2\varphi + n^2)^{-3/2} \tag{6}$$

parna funkcija definirana na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. Njeno proširenje po periodičnosti možemo razviti u jednoliko konvergentan Fourierov red i zatim za restrikciju na osnovi intervala $[-\pi/2, \pi/2]$ napisati

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + a_3 \cos 6\varphi + \ldots, \tag{7}$$

gdje su koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ određeni sa

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + 2n \cos 2\varphi + n^2)^{-3/2} \cos 2k\varphi \, d\varphi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Numeričke vrijednosti koeficijenata a_k mogli bismo odrediti nekom od metoda numeričke integracije prema izrazu (8) ili iskoristiti njihov drugačiji prikaz (prema König, Weise 1951) u obliku beskonačnih redova potencija od n

$$a_k = 2n^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{j} \binom{-\frac{3}{2}}{j+k} n^{2j}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Ako primijenimo (9), prvih nekoliko koeficijenata je:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\left(1 + \frac{9}{4} n^2 + \frac{225}{64} n^4 + \frac{1225}{256} n^6 + \ldots\right) \\
a_1 &= -2n\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{16} n^2 + \frac{525}{128} n^4 + \ldots\right) \\
a_2 &= 2n^2\left(\frac{15}{8} + \frac{105}{32} n^2 + \frac{4725}{1024} n^4 + \ldots\right) \\
a_3 &= -2n^3\left(\frac{35}{16} + \frac{945}{256} n^2 + \ldots\right) \\
a_4 &= 2n^4\left(\frac{315}{128} + \frac{2079}{512} n^2 + \ldots\right) \\
a_5 &= -2n^5\left(\frac{693}{256} + \ldots\right) \\
a_6 &= 2n^6\left(\frac{3003}{1024} + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

U izrazima (10) nisu napisani članovi sa sedmim i većim potencijama od n, čime je omogućeno da se koeficijenti a_k izračunaju s točnošću od 16 znamenaka. Ovi izrazi su mnogo jednostavniji i kraći od uobičajenih glomaznih razvoja (3) po potencijama od e, koji bi, da bi dali istu točnost, morali sadržavati bar članove do potencija e^{16}.

Pomoću razvoja (7) možemo (5) napisati u obliku

$$ds_m = a(1-n)(1-n^2)\left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + a_3 \cos 6\varphi + \ldots\right) d\varphi. \tag{11}$$

koji se može uz nove oznake

$$A = a(1-n)(1-n^2)\frac{a_0}{2} \tag{12}$$

$$b_k = \frac{a_k}{ka_0}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

napisati u obliku (14) pogodnom za integriranje član po član (što je dozvoljeno zbog jednolike konvergencije)

$$ds_m = A(1 + 2b_1 \cos 2\varphi + 4b_2 \cos 4\varphi + 6b_3 \cos 6\varphi + \ldots) d\varphi. \tag{14}$$

Integriranje od geografske širine φ_0 do geografske širine φ daje duljinu luka

$$\begin{aligned} s_m(\varphi_0, \varphi) = {} & A(\varphi + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + b_3 \sin 6_3 + \ldots) - \\ & - A(\varphi_0 + b_1 \sin 2\varphi_0 + b_2 \sin 4\varphi_0 + b_3 \sin 6\varphi_0 + \ldots). \end{aligned} \tag{15}$$

odnosno

$$s_m(\varphi_0, \varphi) = s_m(0, \varphi) - s_m(0, \varphi_0),$$

gdje je

$$s_m(0, \varphi) = A(\varphi + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + b_3 \sin 6\varphi + \ldots). \tag{16}$$

Oblik formule (16) bio je pogodan za računanje u doba logaritamskih tablica, međutim u današnje doba kompjutora pogodniji je drugačiji zapis, pomoću kojeg se smanjuje potreba višestruke primjene trigonometrijskih funkcija, čime se postiže veća brzina izvođenja (računanja) (Morozov 1969, Vincenty 1971, Haimov 1984, Heck 1987). Da bismo formulu (16) transformirali u pogodniji oblik, možemo npr. upotrijebiti Čebiševljeve funkcije druge vrste definirane sa

$$U_k(x) = \sin(k \arccos x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Naime, uz supstituciju

$$x = \cos 2\varphi, \tag{18}$$

formula (16) prelazi u

$$s_m(0, \varphi) = A(\varphi + b_1 U_1(x) + b_2 U_2(x) + b_3 U_3(x) + \ldots). \tag{19}$$

Za Čebiševljeve funkcije druge vrste vrijedi slijedeća jednostavna rekurzivna formula

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x) \qquad k \geq 1, \tag{20}$$

a u literaturi se može naći prvih desetak funkcija u eksplicitnom obliku (Mitrinović 1960). Na taj način izraz (19) lako je transformirati u

$$s_m(0, \varphi) = A\,[\varphi + \sin 2\varphi\,(c_0 + c_1 \cos 2\varphi + c_2 \cos^2 2\varphi + c_3 \cos^3 2\varphi + \ldots)], \tag{21}$$

gdje su novi koeficijenti

$$\begin{aligned}
c_0 &= b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\\
c_1 &= 2b_2 - 4b_4 + 6b_6 - \ldots\\
c_2 &= 4b_3 - 12b_5 + \ldots\\
c_3 &= 8b_4 - 32b_6 + \ldots\\
c_4 &= 16b_5 - \ldots\\
c_5 &= 32b_6 - \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{22}$$

Na analogan način, primjenom Čebiševljevih funkcija druge vrste, ali uz supstituciju

$$x = \cos \varphi, \tag{23}$$

formula za duljinu luka meridijana može se transformirati u oblik

$$s_m(0, \varphi) = A\,[\varphi + \sin \varphi \cos \varphi\,(d_0 + d_1 \cos^2 \varphi + d_2 \cos^4 \varphi + d_3 \cos^6 \varphi + \ldots\,], \tag{24}$$

gdje su novi koeficijenti

$$\begin{aligned}
d_0 &= 2b_1 - 4b_2 + 6b_3 - 8b_4 + 10b_5 - 12b_6 + 14b_7 - \ldots\\
d_1 &= 8b_2 - 32b_3 + 80b_4 - 160b_5 + 280b_6 - 448b_7 + \ldots\\
d_2 &= 32b_3 - 192b_4 + 672b_5 - 1792b_6 + 4032b_7 - \ldots\\
d_3 &= 128b_4 - 1024b_5 + 4608b_6 - 15360b_7 + \ldots\\
d_4 &= 512b_5 - 5120b_6 + 28160b_7 - \ldots\\
d_5 &= 2048b_6 - 24576b_7 + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{25}$$

Formule (21), odnosno (24), imaju prednost pred formulom (16) jer je za njihovu upotrebu potrebna samo jednokratna upotreba trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus. Napomenimo još da se u spomenutim formulama redovi potencija funkcije kosinus mogu računati primjenom Hornerove sheme i time svesti na množenja i zbrajanja.

Izrazi za koeficijente c_k (22), odnosno d_k (25), prikazani su pomoću koeficijenata b_k, uz odgovarajuće izostavljanje članova. U tablici 1 dajemo numeričke vrijednosti za koeficijente a_k, b_k, c_k i d_k izračunate u aritmetici sa 16 znamenaka za Besselov elipsoid, čije su poluosi prema (Pravilnik 1951, Jordan-Eggert-Kneissl 1958) zadane sa

$$\log a = 6.804\,6434\,637$$

$$\log b = 6.803\,1892\,839. \qquad (26)$$

U specijalnom slučaju, ako uzmemo za $\varphi_0 = -\pi/2$ i $\varphi = \pi/2$, dobijemo da je duljina luka jednog cijelog meridijana $s_m = A\pi$, što omogućuje interpretaciju veličine A kao radijusa (tzv. rektificirajuće) sfere, čiji meridijani su iste duljine kao meridijani na elipsoidu.

Za Besselov elipsoid, određen prema (26), dobijemo

$$A = 6\,366\,742.52031\,1864\,\mathrm{m}, \qquad (27)$$

a za duljinu luka cijelog meridijana

$$s_m = 20\,001\,711.52910\,952\,\mathrm{m}. \qquad (28)$$

Tablica 1. Numeričke vrijednosti koeficijenata za Besselov elipsoid

a_0	2.0000 1261 3081 602
a_1	−0.0050 2258 0798 2267
a_2	0.0000 1051 0906 8589
a_3	−0.0000 0002 0530 0637
a_4	0.0000 0000 0038 6675
a_5	−0.0000 0000 0000 0712
a_6	0.0000 0000 0000 0001
b_1	−0.0025 1127 4561 6578
b_2	0.0000 0262 7710 1430
b_3	−0.0000 0000 3421 6557
b_4	0.0000 0000 0004 8334
b_5	−0.0000 0000 0000 0071
b_6	0.0000 0000 0000 0000
c_0	−0.0025 1127 1140 0093
c_1	0.0000 0525 5400 9524
c_2	−0.0000 0001 3686 5373
c_3	0.0000 0000 0038 6669
c_4	−0.0000 0000 0000 1139
c_5	0.0000 0000 0000 0003
d_0	−0.0050 3308 0532 5604
d_1	0.0000 2113 1561 9411
d_2	−0.0000 0011 0425 8013
d_3	0.0000 0000 0626 0179
d_4	−0.0000 0000 0003 7015
d_5	0.0000 0000 0000 0225

2. OVISNOST TOČNOSTI RAČUNANJA DULJINE LUKA MERIDIJANA O TOČNOSTI GEOGRAFSKE ŠIRINE

Duljina luka meridijana s_m (0, φ) je funkcija geografske širine φ krajnje točke i njen diferencijal je dan formulom (5), iz koje možemo dobiti da je

$$\max \left| \frac{ds_m}{d\varphi} \right| = a \frac{1+n}{1-n} = \frac{a^2}{b}. \tag{29}$$

Neka su δs i $\delta \varphi$ maksimalne apsolutne pogreške, tada na osnovi (29) možemo napisati

$$\delta s_m \leq \frac{a^2}{b} \delta\varphi < 31\, \delta\varphi\, ('') , \tag{30}$$

odakle lako dobijemo tablicu 2.

Tablica 2. Točnost duljine luka meridijana u ovisnosti o točnosti geografske širine krajnje točke

$\delta\varphi$ ('')	δs_m (m)
1	31
0.1	3.1
0.01	0.31
0.001	0.031
0.0001	0.0031
0.00001	0.00031

Da bismo npr. bili sigurni da milimetri izračunate duljine luka meridijana imaju smisla, moramo raspolagati geografskom širinom kojoj je točnost veća od 1 stotisućninke sekunde.

3. UTJECAJ ZANEMARIVANJA POJEDINIH ČLANOVA U FORMULAMA ZA RAČUNANJE DULJINE LUKA MERIDIJANA

Lako se vidi da zanemarivanjem člana koji sadrži koeficijent b_k u formuli (16) činimo maksimalnu apsolutnu pogrešku δs_m od s_m (0, φ) u iznosu

$$\delta s_m = A b_k. \tag{31}$$

Budući da je

$$\max (\sin 2\varphi \cos^k 2\varphi) = \left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right]^{0.5},$$

to zanemarivanjem člana koji sadrži koeficijent c_k u formuli (21) činimo maksimalnu apsolutnu pogrešku δs_m od s_m (0, φ) u iznosu

$$\delta s_m = A c_k \left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right]^{0.5}. \tag{32}$$

Kako je

$$\max(\sin\varphi\cos^{2k+1}\varphi) = \left[\frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{2k+1}{2(k+1)}\right)^{2k+1}\right]^{0.5},$$

to zanemarivanjem člana koji sadrži koeficijent d_k u formuli (24) činimo maksimalnu apsolutnu pogrešku δs_m od $s_m(0, \varphi)$ u iznosu

$$\delta s_m = A d_k \left[\frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{2k+1}{2(k+1)}\right)^{2k+1}\right]^{0.5}. \tag{33}$$

Na osnovi izraza (31) — (33) sastavljena je tablica 3, iz koje možemo vidjeti utjecaj pojedinih članova u formulama (16), (21) i (24) na točnost računanja duljine luka meridijana.

Ispitivanje utjecaja zanemarivanja pojedinih članova prema izrazima (32), odnosno (33), nije, prema raspoloživoj geodetskoj literaturi, dosada napravljeno. Obično se zaključci donose samo na osnovi veličine pojedinog koeficijenta, što može dovesti do pogrešne procjene. Tako npr. u knjizi (Haimov 1984) stoji da zanemarivanje posljednjeg napisanog člana u formuli (24) za elipsoid Krasovskoga ne prelazi 0.004 m, a zapravo se radi o 0.0009 m.

Tablica 3. Utjecaj pojedinih članova na točnost računanja duljine luka meridijana

zanemarivanje člana s koeficijentom	iznos maksimalne apsolutne pogreške (m)
formula (16)	
b_2	17.
b_3	0.02
b_4	0.00003
b_5	0.00000005
b_6	0.00000000007
formula (21)	
c_1	17.
c_2	0.03
c_3	0.00008
c_4	0.0000002
c_5	0.0000000006
formula (24)	
d_1	44.
d_2	0.2
d_3	0.0009
d_4	0.000005
d_5	0.00000003

Iz tablice 3 se vidi da pri praktičnom računanju, uz npr. traženu milimetarsku točnost duljine luka meridijana, u formulama (16) i (21) treba uzeti prva tri člana (b_1, b_2, b_3, odnosno c_0, c_1, c_2). Međutim, formula (24), za istu točnost, zahtijeva jedan član više (ova je činjenica u skladu s tvrdnjom u (Heck 1987), gdje stoji da četiri člana osiguravaju milimetarsku točnost).

Postavlja se pitanje mogu li se ipak umjesto formule (16) izvesti formule za praktičnu upotrebu koje bi u sebi sadržavale prednosti izraza (21), odnosno (24), i time bile efikasnije, a da osiguravaju istu točnost kao primjena prvih nekoliko članova formule (16). Pozitivan odgovor na to pitanje daje se u slijedećem poglavlju.

4. NOVI OBLIK FORMULE ZA RAČUNANJE DULJINE LUKA MERIDIJANA

Analiza učinjena u prethodnom poglavlju pokazuje da beskocnačni redovi (21) i (24) konvergiraju sporije od polaznog reda (16) iz kojeg su nastali. Međutim, pri praktičnom računanju ionako se ne koristi cijeli red, nego samo njegovih prvih nekoliko članova. Tako npr. na osnovi prethodnih razmatranja možemo beskonačni red (16) zamijeniti izrazom

$$s_m(0, \varphi) = A(\varphi + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + b_3 \sin 6\varphi) + \delta s_m, \tag{34}$$

gdje je

$$\delta s_m \leq 0.00003 + 31 \delta\varphi\,('') \qquad (\delta s_m \text{ u metrima}). \tag{35}$$

Izraz (35) lako se dobije iz ocjena (30) i (31). Formula (34) imat će milimetarsku točnost ($\delta s_m \leq 0.0005$) ako je točnost poznavanja geografske širine takva da je $\delta\varphi\,('') < 0.00001$.

Pomoću Čebiševljevih funkcija druge vrste, slično kao u prvom poglavlju ovog rada, formulu (34) možemo transformirati u

$$s_m(0,\varphi) = A[\varphi + \sin 2\varphi\,(c_0 + c_1 \cos 2\varphi + c_2 \cos^2 2\varphi)] + \delta s_m, \tag{36}$$

s tom razlikom što se koeficijenti c_0, c_1 i c_2 sada određuju prema

$$c_0 = b_1 - b_3, \qquad c_1 = 2b_2, \qquad c_2 = 4b_3. \tag{37}$$

Isto tako, formulu (34) možemo transformirati u oblik

$$s_m(0, \varphi) = A[\varphi + \sin\varphi \cos\varphi\,(d_0 + d_1 \cos^2\varphi + d_2 \cos^4\varphi)] + \delta s_m, \tag{38}$$

s time što se koeficijenti d_0, d_1 i d_2 sada određuju prema

$$d_0 = 2b_1 - 4b_2 + 6b_3, \qquad d_1 = 8b_2 - 32b_3, \qquad d_2 = 32b_3. \tag{39}$$

Za praktičnu primjenu pojedine od gornjih formula ponekad će biti spretnije da koeficijenti ne budu izraženi jedni pomoću drugih, nego izravno pomoću parametara razmatranog elipsoida. Zato dajemo gotove formule koje se lako mogu izvesti:

$$A = \frac{a}{64}(1 - n)(64 + 80n^2 + 81n^4)$$

$$b_1 = -\frac{n}{16}(24 - 9n^2) \qquad b_2 = \frac{15}{32}n^2(2 - n^2) \qquad b_3 = -\frac{35}{48}n^3$$

$$c_0 = -\frac{n}{24}(36 - 31n^2) \qquad c_1 = \frac{15}{16}n^2(2 - n^2) \qquad c_2 = -\frac{35}{12}n^3$$

$$d_0 = -\frac{n}{8}(24 + 30n + 26n^2 - 15n^3) \qquad d_1 = \frac{5}{12}n^2(18 + 56n - 9n^2)$$

$$d_2 = -\frac{70}{3}n^3.$$

Da bismo se na kraju opredijelili za jednu od tri ponuđene formule (34), (36) ili (38), uočimo najprije da su u pogledu točnosti ravnopravne, tj. učinjena pogreška prema pravoj duljini luka meridijana bit će u sva tri slučaja sasvim ista, a ocjenjuje se prema izrazu (35). Najefikasnija će biti formula (40), nastala na jednostavan način iz formule (36), jer zahtijeva najmanji broj računskih operacija:

$$s_m(0, \varphi) = A\,[\varphi + \sin 2\varphi\,(c_0 + \cos 2\varphi\,(c_1 + c_2 \cos 2\varphi))] + \delta s_m \qquad (40)$$

Za bilo koji elipsoid potrebni koeficijenti lako se mogu izračunati, a za Besselov elipsoid određen prema (24), numeričke vrijednosti koeficijenata potrebnih za primjenu formule (40) iznose

$$A = 6366742.5203$$

$$c_0 = -0.0025\,1127\,114$$

$$c_1 = 0.0000\,0525\,542$$

$$c_2 = -0.0000\,0001\,369.$$

Istaknimo na kraju da se formule veće ili manje točnosti za računanje duljine luka meridijana mogu po potrebi izvesti na potpuno analogan način.

Spomenimo još da se formula (40) za računanje duljine luka meridijana dosada nije pojavljivala u geodetskoj literaturi. Najsličniji su tome (Morozov 1969, Vincenty 1971, Morozov 1979, Haimov 1984, Heck 1987) izrazi pomoću trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus jednostrukih kutova, čije smo slabije strane spomenuli u ovom radu.

Napomena. Numeričke vrijednosti za poluosni a i b Besselova elipsoida (izražene u metrima), koje se navode u geodetskoj literaturi, redovito nisu u skladu s njihovim logaritmima (26). Na tu činjenicu upozoreno je i u radu (Mittermayer 1964).

Zahvaljujem svima koji su čitali rukopis ovog rada na korisnim savjetima, a posebno kolegi Svetozaru Petroviću.

LITERATURA:

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija. Zagreb, Tehnička knjiga, 1955.

Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona. Sveučilište u Zagrebu, Liber, 1976.

Čubranić, N. (1974): Viša geodezija, II dio. Zagreb, Tehnička knjiga, 1974.

Edoga, A. C. (1981): Computation of the foot-point latitude in coordinate transformation. Survey Review, Vol. 26, 1981, No. 202, 192—194.

Großmann, W. (1976): Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Stuttgart, Verlag Konrad Wittwer, 1976.

Haimov, Z. S. (1984): Osnovni vissej geodezii. Moskva, Nedra, 1984.

Heck, B. (1987): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Karlsruhe, Herbert Wichmann Verlag, 1987.

Heitz, S. (1988): Coordinates in Geodesy. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Springer-Verlag, 1988.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen. Leipzig, B. G. Teubner, 1880.

Hirvonen, R. A. (1969): The use of subroutines in geodetic computations. Maanmittaus, 1969, 50—54.

Hirvonen, R. A. (1970): The use of subroutines in geodetic computations. Maanmittaus, 1970, 45—61.

Hristov, V. K. (1957): Koordinati Gaussa-Krjugera na ellipsoide vraščenija. Moskva, Geodezizdat, 1957.

Jackson, J. E. (1978): Transverse Mercator Projection. Survey Review, Vol. 24, 1978, No. 188, 278—285.

Jordan-Eggert-Kneissl (1958): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, 10. Ausgabe, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1958.

Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija. Beograd, Vojnogeografski institut, 1983.

König, R., K. H. Weise (1951): Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und Kartographie, Erster Band. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1951.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. Potsdam: Veröffentlichung des Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge No. 52. Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

Lenzmann, L. (1985): Umrechnung Gaußscher konformer Koordinaten durch Approximationsformeln. AVN, 1985, 5, 193—199.

Mitrinović, D. (1960): Zbornik matematičkih problema II. Naučna knjiga, Beograd, 1960.

Mittermayer, E. (1964): Die numerischen Werte der Besselschen Erdkonstanten. ZfV, 1964, 12, 469—470.

Morozov, V. P. (1969, 1979): Kurs sferoidičeskoj geodezii. Moskva, Nedra, 1969, 1979.

Muminagić, A. (1981): Viša geodezija I. Sarajevo, Građevinski fakultet, 1981.

Pravilnik (1951): za državni premer, I deo, Triangulacija, Knjiga prva. Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Beograd, Jugoslovensko štamparsko preduzeće, 1951.

Snyder, J. P. (1982): Map Projections Used by the U. S. Geological Survey. Geological Survey Bulletin, 1982, No. 1532.

Svečnikov, N. S. (1953): Viša geodezija, prva knjiga. Beograd. Izdanje Savezne geodetske uprave, 1953.

Vincenty T. (1971): The meridional distance problem for desk computers. Survey Review, 1971, No. 161, 136—140.

Živković, A. (1972): Viša geodezija. Beograd, Građevinska knjiga, 1972.

LENGTH OF A MERIDIAN ARC

The paper deals with the computation of the length of a meridian arc by using trigonometric series. The coefficients of these series are also usually represented as series. It is stressed that it is more convenient to represent these coefficients by the parameter n instead by the customary e or e'.

Several forms of trigonometric series have been investigated with the purpose of reducing the amount of the needed calculations. The dependence of the meridional distance calculation accuracy on the accuracy with which the geodetic latitude is known has been taken into consideration, as well as the effect of neglecting some terms of the series. From this research a new form of the formula for the calculation of the length of a meridian arc has been derived.

Primljeno: 1990—02—06