UDK 528.412
Originalni znanstveni članak

ODREĐIVANJE KOORDINATA TRIGONOMETRIJSKE TAČKE MJERENJEM UNUTRAŠNJIH PRAVACA I VERTIKALNIH KUTOVA NA DVIJE DATE TAČKE

Nihad Kapetanović — Sarajevo*

SAŽETAK: U članku se razmatra zadatak određivanja koordinata trigonometrijske tačke mjerenjem jednog horizontalnog i dva vertikalna kuta sa tražene na dvije date tačke. U odnosu na već objavljeno rješenje tog zadatka (Geodetski list 1983, 7—9, 151—156) predloženim rješenjem ne zanemaruju se utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije, pa se dobijaju tačniji rezultati.

1. UVOD

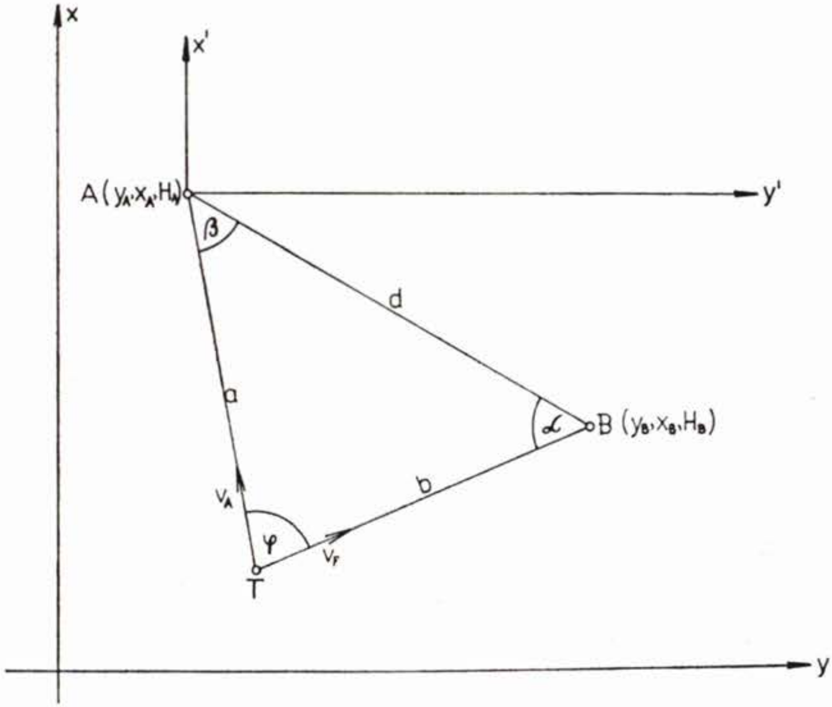
Vrlo interesantan zadatak određivanja koordinata trigonometrijske tačke na osnovu mjerenja jednog horizontalnog i dva vertikalna kuta sa tražene na dvije date tačke razmatran je u [1]. U tom radu izvedene su odgovarajuće formule za rješenje zadatka, kao i za ocjenu tačnosti. Data je i geometrijska interpretacija i pokazano da uvijek postoje dva, ili barem jedno rješenje. Pretpostavljene greške mjerenja horizontalnih i vertikalnih kutova realno su procijenjene. Ipak, u praktičnoj primjeni često se ne dobijaju upotrebljive, tj. dovoljno tačne vrijednosti koordinata tražene tačke, i to zbog toga što su zanemareni utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije. Autor je, doduše, odmah na početku rada naglasio da su ti utjecaji zanemareni, ali nije u dovoljnoj mjeri sagledao posljedice tog zanemarivanja, što će se pokazati u nastavku.

Neka su, dakle, sa tražene tačke T izmjereni horizontalni kut φ i vertikalni kutovi v_A i v_B prema tačkama A i B, čije su sve tri koordinate poznate (sl. 1). Ako sa i označimo visinu instrumenta, sa l_A visinu signala na tački A i sa l_B visinu signala na tački B, biće odgovarajuće visinske razlike

$$\Delta h_T^A = a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2 + i - l_A,$$

$$\Delta h_T^B = b \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b^2 + i - l_B, \tag{1}$$

* Prof. dr Nihad Kapetanović, Građevinski fakultet, Sarajevo, Hasana Brkića 24.



pri čemu su k koeficijent refrakcije i R radijus Zemlje. S obzirom na sl. 1 važi jednadžba

$$\Delta h_T^A - \Delta h_T^B = H_A - H_B, \tag{2}$$

gdje su H_A i H_B nadmorske visine tačaka A i B. Ako jedn. (1) uvrstimo u jedn. (2), imaćemo

$$a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2 - b \operatorname{tg} v_B - \frac{1-k}{2R} b^2 = \Delta H, \tag{3}$$

pri čemu je uvedena oznaka

$$\Delta H = H_A - H_B + l_A - l_B. \tag{4}$$

Jednadžbu (3) možemo pisati u obliku

$$a \operatorname{tg} v'_A - b \operatorname{tg} v'_B = \Delta H, \tag{5}$$

gdje su

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} v'_A &= \frac{a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2}{a} = \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a, \\
\operatorname{tg} v'_B &= \frac{b \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b^2}{b} = \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Budući da je u formuli (3) u radu [1] izostavljen utjecaj Zemljine zakrivljenosti i refrakcije, umjesto (ispravne) formule (5) uzeta je formula

$$a \operatorname{tg} v_A - b \operatorname{tg} v_B = \Delta H \tag{5'}$$

u radu [1] ta je formula označena sa (1). Uspoređivanjem (ispravne) formule (3) i približne (5') vidimo da se one podudaraju samo u slučaju da je a = b (sl. 1), odnosno da je razlika utoliko veća ukoliko se dužine strana *a* i *b* međusobno više razlikuju.

Zanemarivanje zakrivljenosti Zemlje i refrakcije ima za posljedicu da je umjesto visinske razlike $\Delta H - \frac{1-k}{2R}(a^2-b^2)$ u formuli (3) uzeta približna visinska razlika ΔH, ili da su u formuli (5) umjesto vertikalnih kutova v'_A i v'_B uzeti kutovi v_A i v_B.

Iz podataka numeričkog primjera navedenog u [1] nije teško ustanoviti da je umjesto visinske razlike 150 — 0,09 = 149,91 m uzeta visinska razlika 150,00 m, ili da su umjesto vertikalnih kutova $v'_A = 8° 00' 18,1''$ i $v'_B = 3° 00' 09,2''$ uzeti vertikalni kutovi $v_A = 8° 00' 00''$ i $v_B = 3° 00' 00''$.* Te su razlike suviše velike da bi se smjele zanemariti, s obzirom na pretpostavljene srednje greške mjerenih vertikalnih kutova $m_{vA} = m_{vB} \pm 10''$. Očigledno (formula (16) u radu [1]) srednja greška tražene tačke *bitno* zavisi od srednje greške mjerenja vertikalnih kutova.

U nastavku ovog rada, a primjenjujući osnovnu ideju rada [1], predlaže se nova metoda za rješavanje istog zadatka kojom se uzimaju u obzir zakrivljenost Zemlje i refrakcija, čime se bitno povećava tačnost određivanja koordinata tražene tačke. Ustvari, tek pri primjeni te metode važi formula (16) u radu [1] za položajnu grešku koordinata tražene tačke. Međutim, čak i u tom slučaju vrijednost srednje položajne greške koordinata tražene tačke sračunatu po toj formuli treba također uzeti sa rezervom, prvenstveno zbog činjenice da se nadmorske visine trigonometrijskih tačaka obično određuju metodom trigonometrijskog nivelmana, pa visine datih tačaka mogu biti opterećene nezanemarljivim vrijednostima srednjih grešaka. Tome se pridružuju utjecaj greške u vrijednosti koeficijenta refrakcije i grešaka u mjerenju visina signalâ.

* Računanje je izvršeno sa vrijednostima k = 0,13 i R ≐ 6 370 km.

2. RJEŠENJE ZADATKA SVOĐENJEM NA LUČNI PRESJEK

2.1. *Jednadžba kružnice K_1*

Usvojimo pomoćni koordinatni sistem x′, y′ paralelan sa sistemom x, y i ishodištem u tački *A* (sl. 1). U tom koordinatnom sistemu koordinate tačaka *A* i *B* jesu

$$\begin{aligned} y'_A &= x'_A = 0, \\ y'_B &= y_B - y_A = \Delta y, \\ x'_B &= x_B - x_A = \Delta x. \end{aligned} \tag{7}$$

Kut φ može se izraziti kao razlika odgovarajućih smjernjaka, tj.

$$\varphi = \nu_T^B - \nu_T^A, \tag{8}$$

pa je

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\nu_T^B - \nu_T^A) = \frac{\operatorname{ctg} \nu_T^B \operatorname{ctg} \nu_T^A + 1}{\operatorname{ctg} \nu_T^A - \operatorname{ctg} \nu_T^B} = \frac{\dfrac{x'_B - x'}{y'_B - y'}\,\dfrac{x'_A - x'}{y'_A - y'} + 1}{\dfrac{x'_A - x'}{y'_A - y'} - \dfrac{x'_B - x'}{y'_B - y'}}, \tag{9}$$

odakle, ako uvažimo jedn. (7) i izvršimo sređivanje dobijamo

$$x'^2 + y'^2 - (\Delta y + \Delta x \operatorname{ctg} \varphi)\, y' - (\Delta x - \Delta y \operatorname{ctg} \varphi)\, x' = 0. \tag{10}$$

Jednadžba (10) predstavlja kružnicu K_1, koja prolazi kroz tačke A, B i T, a ima centar u tački

$$O_1 \left(y'_1 = \frac{\Delta y + \Delta x \operatorname{ctg} \varphi}{2};\quad x'_1 = \frac{\Delta x - \Delta y \operatorname{ctg} \varphi}{2} \right) \tag{11}$$

i radijus

$$r_1 = \frac{d}{2 \sin \varphi}. \tag{12}$$

2.2. *Jednadžba kružnice K_2*

Ako kvadriramo jednadžbu (5), dobijamo

$$a^2 \operatorname{tg}^2 v'_A + b^2 \operatorname{tg}^2 v'_B - 2\, a\, b \operatorname{tg} v'_A \operatorname{tg} v'_B = \Delta H^2. \tag{13}$$

S druge strane, za trokut ABT (sl. 1) važi kosinusni teorem, tj.

$$a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\varphi = d^2. \tag{14}$$

Jednadžbu (13) pomnožimo sa cos φ, a jednadžbu (14) sa tg v'_A tg v'_B i od tako dobijene jedn. (13) oduzmemo jedn. (14), pa dobijamo

$$c_1\,a^2 + c_2\,b^2 = c, \tag{15}$$

pri čemu su uvedene oznake

$$\begin{aligned} c_1 &= \mathrm{tg}^2\, v'_A \cos\varphi - \mathrm{tg}\, v'_A\, \mathrm{tg}\, v'_B, \\ c_2 &= \mathrm{tg}^2\, v'_B \cos\varphi - \mathrm{tg}\, v'_A\, \mathrm{tg}\, v'_B, \\ c &= \Delta H^2 \cos\varphi - d^2\, \mathrm{tg}\, v'_A\, \mathrm{tg}\, v'_B. \end{aligned} \tag{16}$$

Vrijednosti tg v'_A i tg v'_B računaju se po formulama (6). U korekcionim članovima $\frac{1-k}{2R}$ a odnosno $\frac{1-k}{2R}$ b tih formula nisu poznate vrijednosti strana *a* i *b*, umjesto njih treba uzeti približne vrijednosti a_0 i b_0, koje se pročitaju sa karte ili se procijene.

Iz sl. 1 vidi se da je

$$\begin{aligned} a^2 &= (y' - y'_A)^2 + (x' - x'_A)^2, \\ b^2 &= (y' - y'_B)^2 + (x' - x'_B)^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Ako jedn. (17) uvrstimo u jedn. (15) i pri tome uvažimo jedn. (7), imaćemo nakon sređivanja

$$x'^2 + y'^2 - \frac{2c_2\,\Delta y}{c_1 + c_2}\,y' - \frac{2c_2\,\Delta x}{c_1 + c_2}\,x' - \frac{c - c_2\,d^2}{c_1 + c_2} = 0. \tag{18}$$

Posljednja jednadžba predstavlja jednadžbu kružnice K_2, koja prolazi kroz traženu tačku *T*, a ima centar u tački

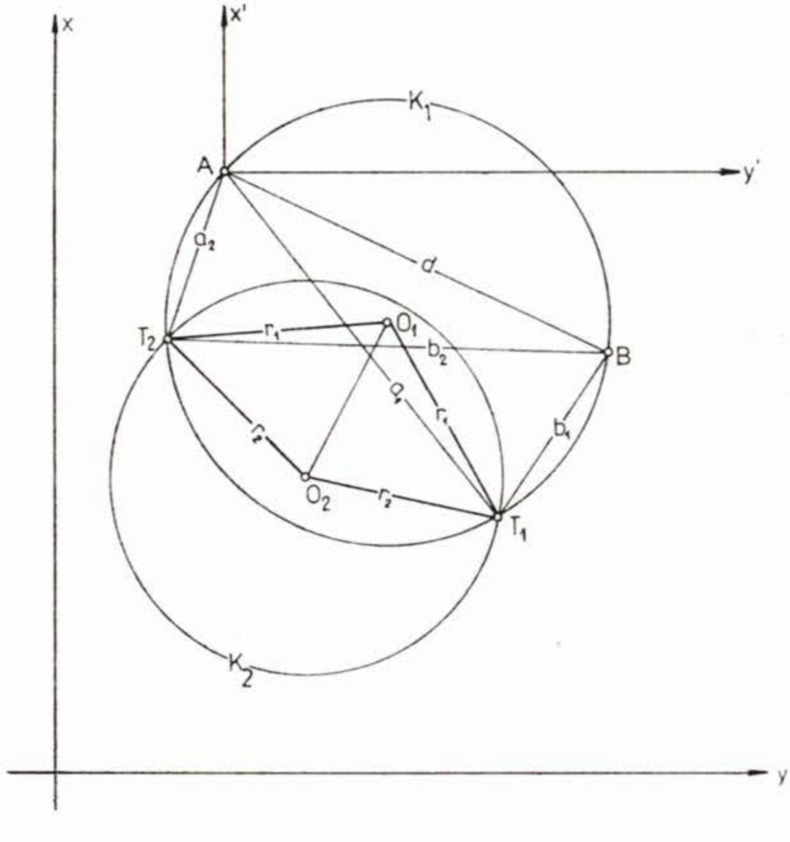
$$O_2\left(y'_2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2}\,\Delta y;\quad x'_2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2}\,\Delta x\right) \tag{19}$$

i radijus

$$r_2 = \sqrt{\frac{c\,(c_1 + c_2) - c_1\,c_2\,d^2}{(c_1 + c_2)^2}}, \tag{20}$$

2.3. *Određivanje koordinata tražene tačke*

Tražena tačka *T* nalazi se na presjeku kružnica K_1 i K_2 (sl. 2). Postoje dva rješenja ili barem jedno, uvijek kad je $v'_A \neq v'_B \neq 0$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, $-90^\circ < v'_A$, $v'_B < 90^\circ$, kao što je u [1]. U koordinatnom sistemu x′, y′ koordinate tražene tačke će se odrediti lučnim presjekom budući da su poznate koordinate centara O_1 i O_2 kružnica K_1 i K_2 i njihovi radijusi r_1 i r_2. Rješenje ovog zadatka je poznato, pa se neće opisivati. Jedno rješenje (T_1) leži s desne, a drugo (T_2) s lijeve strane pravca $O_1 O_2$.



Pravo rješenje treba odabrati na osnovu terenskih prilika (skice). Nakon iznalaženja koordinata y′, x′ tačke *T* u pomoćnom koordinatnom sistemu lako je sračunati koordinate iste tačke u sistemu x, y

$$y = y_A + y'; \qquad x = x_A + x'. \tag{21}$$

Napomena: Nakon što su sračunate koordinate tražene tačke, mogu se sračunati dužine strana *a* i *b*, pa ako se utvrdi da su vrijednosti a_0 i b_0 uzete suviše grubo, treba sa novim vrijednostima sračunati nove vrijednosti za tg v'_A i tg v'_B, pa s tim vrijednostima ponovo riješiti zadatak.

3. NUMERIČKI PRIMJER

Uzet je isti primjer kao u [1].

Dati podaci:

tačka	y (m)	x (m)	H (m)
A	13 000	40 000	300
B	14 000	41 000	150

$\varphi = 85°$, $v_A = 8°$, $v_B = 3°$, $l_A = l_B$

Rješenje:

$d = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = 1414{,}2136$ m,

(procjena) $a_0 = 1\,400$ m, $b_0 = 600$ m,

/formula (6)/ $\mathrm{tg}\, v'_A = 0{,}1406\,3644$, $\mathrm{tg}\, v'_B = 0{,}0524\,4875$,

/formula (11)/ $y'_1 = 543{,}74433$ m, $x'_1 = 456{,}25567$ m,

/formula (12)/ $r_1 = 709{,}80783$ m,

/formula (16)/ $c_1 = -0{,}0056\,5239$, $c_2 = -0{,}0071\,3645$, $c = -12\,791{,}407\ m^2$

formula (19)/ $y'_2 = 558{,}0219$ m, $x'_2 = 558{,}0219$ m

//formula (20)/ $r_2 = 711{,}99296$ m

/lučni presjek/ $y' = 1250{,}79$ m, $x' = 393{,}68$ m

/formula (21)/ $y = 14\,250{,}79$ m, $x = 40\,393{,}68$ m

(u radu [1] $y = 14\,250{,}87$ m, $x = 40\,394{,}66$ m)

Razlika se pojavila usljed uzimanja u obzir zakrivljenosti Zemlje i refrakcije. Za $v'_A = v_A$ i $v'_B = v_B$ dobija se isti rezultat.

LITERATURA

[1] Deželak ,F.: Određivanje koordinata trigonometrijske točke mjerenjem unutrašnjih pravaca i vertikalnih kutova na dvije date točke, Geodetski list 1983, 7—9, 151—156.

[2] Kapetanović, N.: Opredelenie koordinat četvertoj točki po koordinatam treh toček, Geodezija i aerofotosjomka, 1976, 4, 29—31.

THE DETERMINATION OF COORDINATES OF A TRIGONOMETRIC POINT BY MEASURING DIRECTIONS AND VERTICAL ANGLES TOWARDS TWO GIVEN POINTS

The paper deals with the problem of determining the coordinates of a trigonometric point by measuring horizontal directions and vertical angles towards two known points. With regard to the already published solution to the mentioned problem (Geodetski list 1983, 7—9, 151—156), the proposed solution includes the correction for terrestrial curvature and refraction, therefore more accurate results are obtained.

Primljeno: 1989-06-23