

## PRIMEDBE I GREŠKE KOJE TO NISU

Krsta VRAČARIĆ — Beograd\*

**SAŽETAK:** Članak je odgovor na primjedbe V. Milovanovića (Geodetski list 1988, 1—3, 77) i G. Perovića (Geodetski list 1988, 10—12, 329—332) na raniji članak autora objavljen u Geodetskom listu 1987, 7—9, 243—253.

Na moj rad [1] objavljen u vašem časopisu osvrnuli su se prof. dr Vladeta Milovanović [2] i prof. dr Gligorije Perović [3] i dali određene primedbe. Neke su im primedbe identične, samo se terminološki razlikuju. Prof. dr Vladeta Milovanović nazvao ih je »primedbama«, a prof. dr Gligorije Perović »greškama«. Neke od primedaba su uopštene, a neke imaju konkretno značenje. No ja ću pokušati da dam odgovor na sve navodne »propuste« u mom radu. Pošto su autori numerisali svoje primedbe, da ne bih propustio odgovor na neku od njih, ja ću ih numerisati na isti način, s tim što treba imati u vidu da su im neke primedbe slične.

Prvo ću se osvrnuti na primedbe prof. Milovanovića.

U vezi s prvom primedbom, prof. Milovanović je u pravu. Umesto »mer-nih veličina«, kako stoji u naslovu, treba da stoji »merenih veličina«. Ovde se radi o štamparskoj grešci, izostavljeno je slovo »e«.

Druga primedba ima terminološki karakter. Pojmovi na koje ukazuje prof. Milovanović ne mogu ništa suštinski promeniti u mom radu, niti osporiti zaključke do kojih sam u radu došao. Bilo bi veoma korisno da se prof. Milovanović potrudio da konkretno ukaže šta u mom radu nije u redu zato što nisu upotrebljeni termini koje od predlaže.

Treća primedba prof. Milovanovića odnosi se na množenje jednačina po-pravaka. Ovom se primedbom osporava tvrđenje u radu [1] kao *netačno*, me-đutim ono je *tačno* i nije *protivrečno*. Naime, u literaturi su odavno poznata Šrajberova pravila. Treće pravilo glasi: jednačina odstupanja

$$v = ax + by + \dots + ut + f \text{ sa težinom } p$$

može se zameniti fiktivnom jednačinom odstupanja

$$v' = qv = qax + qby + \dots + qut + qf$$

\* Prof. dr Krsta Vračarić, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta, Beograd, Bulevar revolucije 73

sa težinom  $p/q^2$ , gde se za broj  $q$  ne postavljaju bilo kakvi uslovi. Ako bi se ovo pravilo neposredno primenilo na jednačine popravaka (5) iz rada [1], dobile bi se jednačine popravaka (10) sa težinama slobodnih članova

$$Pr'_i = \frac{P_i}{(S_{i_0} + S_i)^2} \approx \frac{P_i}{4S_{i_0}^2} \approx \frac{P_i}{4S_i^2}.$$

Drugi deo treće primedbe u koliziji je sa prvim delom primedbe. Prvi deo primedbe ima kritičku intonaciju, dok drugi deo ne osporava postupak koji je primenjen u mome radu. Naravno, ja se slažem sa drugim delom primedbe, a objašnjenje zašto se slažem sadržano je u mom odgovoru koji se odnosi na prvi deo treće primedbe.

Cetvrta primedba je više verbalnog karaktera, bez konkretnog zaključka. Iz ove se primedbe ne može zaključiti da izraz (21) u radu [1] nije dobar. Takođe se ne ističe da su dalji dokazi nekorektni.

U drugom delu primedbe ističe se kako je ostali deo jednačina popravaka ostao isti kao u normalnom slučaju. Međutim, nije naglašeno koji je to normalni slučaj i sa čime su jednačine popravaka upoređivane.

Primedbe prof. Perovića nisu strogo razgraničene kao kod prof. Milovanovića. Ipak, pokušaću da dam odgovor na sva njegova zapažanja.

Prva primedba prof. Perovića već je sadržana u trećoj primedbi prof. Milovanovića. Ovde ću dati nešto širi odgovor. Prva »principijelna greška« kako navodi prof. dr Perović smatram da se ne može definisati kao greška. Veličina  $S_i$  je stohastička promenljiva. Ta vrednost se iz beskonačnog broja mogućih vrednosti dobija sa određenom verovatnoćom. Dalje množenje jednačina popravaka obavlja se ne nekom slučajnom veličinom koja će se naknadno dobiti, već tačno određenom veličinom koja je u tom trenutku poznata. Uostalom, kako sam već istakao, kada se jednačine popravaka, prema Šrajberovim pravilima, množe nekim brojem  $q$ , ne postavljaju se nikakva ograničenja u pogledu vrednosti tog broja. Taj se broj proizvoljno bira ili to može biti neka vrednost izabrana po slobodnom izboru i želji, pa se ne vidi razlog zašto to ne može biti broj  $(S_{i_0} - S_i)$ . Ovom primedbom profesor Perović čini nedopustiv previd. Po njegovom mišljenju, rezultati merenja  $(S_i)$  kao stohastičke promenljive ne smeju se upotrebljavati za množenje jednačina popravaka. Međutim, prilikom merenja dužina klasičnim priborom (npr. pantljkikom) po terenu iste kategorije, težine rezultata merenja računaju se kao njihove recipročne vrednosti  $p_i = \frac{1}{S_i}$ .

Radi normiranja jednačina popravaka ona se množe kvadratnim korenom iz težina, tj.  $\sqrt{p_i} = \sqrt{\frac{1}{S_i}}$ . Očigledno je da se za ovo množenje takođe koristi slučajna veličina. To znači, po mišljenju prof. Perovića, da je to nedozvoljena linearna transformacija, koju samo verbalno ističe a ničim ne dokazuje.

»Druga principijelna greška« na koju ukazuje prof. Perović uopšte nije greška niti neki nehotičan propust u mom radu. U literaturi su masovno poznati slučajevi da se, pri teorijskim razmatranjima i pri numeričkoj obradi pojedinih približno jednakih veličina te veličine u nekim slučajevima mogu izjednačiti. Naravno, to je dozvoljeno samo onda kada ovakvo izjednačavanje nema praktičan uticaj na konačan rezultat. Upravo u mom radu je takav slu-

čaj, pa je interesatno da to prof. Perović nije zapazio. Ukoliko je prof. Perović uveren da je njegova primedba umesna, onda je to trebao i egzaktno da dokaže. Da bi pokazao da se navedena približnost u mom radu neće odraziti na konačne rezultate izravnjanja, primer broj 4 iz rada [1], u kojem su težine računane po formuli  $p_i = \frac{1}{S_i^3}$  urađen je ponovno, ali sa težinama

$$p_i = \frac{1}{S_i (S_{i_0} + S_i)^2}, \text{ i dobijeni su isti rezultati.}$$

U radu [1] na praktičnom primeru je pokazao da se dobijaju isti rezultati za nepoznate veličine bez obzira da li u izravnjanju učestvuju merene vrednosti dužina ili njihovi kvadrati. Upravo je ova činjenica izazvala polemiku. Zato ću u ovom radu teorijski dokazati da u izravnjanju umesto merenih dužina mogu učestvovati njihovi kvadrati. Time će se istovremeno potvrditi ispravnost mojih razmatranja.

Kada u izravnjanju učestvuju linearne vrednosti merenih dužina  $S_i$ , tada će funkcije veze imati izgled

$$S + v = S' = f(x, y). \quad (1)$$

Odgovarajuće jednačine popravaka prikazane u matricnom obliku biće

$$v = A x + f, \quad (2)$$

gdje je:

- A — matrica koeficijenta u jednačinama popravaka
- x — vektor nepoznatih
- f — vektor odstupanja  $f = S_0 - S$
- S — vektor merenih dužina
- $S_0$  — približne vrednosti merenih dužina
- S' — popravljane vrednosti merenih dužina

Normalne jednačine biće

$$N x + n = 0, \quad (3)$$

gde je:

$$N = A^* p A, \quad (4)$$

$$n = A^* p f. \quad (5)$$

Vektor nepoznatih x je

$$x = -N^{-1} n. \quad (6)$$

Kada u izravnjanju učestvuju kvadratne vrednosti merenih dužina  $S_i^2$ , funkcije veze imaće izgled

$$S^2 + V = S'^2 = f^2(x, y). \quad (7)$$

Jednačine popravaka u ovom slučaju biće

$$V = Bx + F \quad (8)$$

sa težinama

$$P = \frac{P}{(S_0 + S)^2}, \quad (9)$$

gde je:

$$B = (S_0 + S) \cdot A \quad (10)$$

matrica koeficijenata u jednačinama popravaka

$$S_0 + S = \begin{vmatrix} S_{1_0} + S_1 & & & & & \\ & S_{2_0} + S_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & S_{n_0} + S_n & \end{vmatrix} \quad (11)$$

matrica težina

$$P = \begin{vmatrix} P_1 & & & & \\ & P_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P_n \end{vmatrix} \quad (12)$$

vektor slobodnih članova

$$F = (S_0^2 - S^2) = (S_0 - S)(S_0 + S) \quad (13)$$

matrica dužina

$$S = \begin{vmatrix} S_1 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & S_n \end{vmatrix} \quad (14)$$

Normalne jednačine biće

$$N = B^*PB = A^*(S_0 + S)^* \cdot \frac{P}{(S_0 + S)^2} (S_0 + S)A = A^*pA, \quad (15)$$

$$n = B^*Pf = A^*(S_0 + S)^* \cdot \frac{P}{(S_0 + S)^2} (S_0 + S)(S_0 - S) = A^*pf. \quad (16)$$

Na osnovu poslednja dva izraza može se zaključiti da se rezultati izravnanja neće promeniti kada se umesto linearnih vrednosti merenih dužina uzmu kvadratne vrednosti merenih dužina, pod uslovom da se težine računaju po formuli (9).

Problem kvadratnog ocenjivanja nije nov, njime su se bavili mnogi autori. Tako npr. prof. Bem u svojoj knjizi [4] primenjuje kvadratno ocenjivanje, mada težine ne određuje na odgovarajući način. Zato je u radu [1] predložen nov način određivanja težina do kojih se došlo na osnovu teorijskih razmatranja.

Interesantno je da prof. dr Gligorije Perović mom radu imputira neke stvari koje u njemu nisu prisutne. Naime, prof. Perović tvrdi da se ja umesto popravaka koristim njihovim kvadratima. U netačnost ovih tvrdjenja može se svako lako uveriti. Ostaje nejasno da li to radi namerno ili uopšte nije razumeo moj rad.

Na kraju ne mogu a da se ne osvrnem na jedno didaktičko zapažanje prof. Perovića, koje se odnosi na poznavanje Gausovih postavki. Iz teksta u radu [3] može se zaključiti da ih on navodno dobro poznaje a da su autoru rada [1] nepoznati. Radi se o uslovima kada se može primeniti metoda najmanjih kvadrata. Ti uslovi, koje na istaknut način navodi prof. Perović u svom osvrtu na moj rad, poznati su svim stručnjacima koji se bave matematičkom obradom merenih veličina u geodeziji jer se obavezno navode u stručnoj literaturi.

Kao rezime ove polemike može se istaći da je prof. Milovanović nastojao da konkretizuje svoje primedbe, naravno, nadajući se da su one i umesne. Međutim, pretenzije prof. Perovića su mnogo veće i veoma prepoznatljive — da kroz svoj rad sebe istakne, ali nadam se da je to učinio na svoju štetu jer se pokazalo da problemima pristupa formalistički, krijući se iza autoriteta, pa zato navodi dug spisak veoma značajnih dela i pri tome se ne upušta u bilo kakvu konkretnu polemiku sa tvrdnjama u mom radu [1].

#### LITERATURA:

- [1] Vračarić, K.: Primena posrednog izravnanja kada se koriste kvadrati merenih veličina (dužina), Geodetski list 1987, 7—9, 243—253.
- [2] Milovanović, Vladeta: Primedbe na članak: Primena posrednog izravnanja kada se koriste kvadrati merenih veličina (dužina), Geodetski list, 1988, 1—3, 77.
- [3] Perović, Gligorije: O zameni linearnog kvadratnim ocenjivanjem, Geodetski list 1988, 10—12, 329—332.
- [4] Böhm, J.: Analiza rezultata merenja i izravnanja, Prag, 1964. (prevod sa češkog).
- [5] Шеффе: Дисперсионный анализ, prevod sa engleskog, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1963.

#### COMMENTS ON ERRORS

The paper is a response to comments made by V. Milovanović (Geodetski list 1988, 1—3, 77) and G. Perović (Geodetski list 1988, 10—12, 329—332) concerning the author's previous article published in Geodetski list 1987, 7—9, 243—253.