

UDK 528.14

528.181

Originalni znanstveni rad

## NEKE RELACIJE IZMEĐU ELIPSE I KRIVULJE POGREŠAKA I GRAFIČKI PRIKAZI POMOĆU RAČUNALA

Miljenko LAPAINE — Zagreb\*

### 1. UVOD

Razvojem elektronike i računala zbile su se u geodeziji u posljednjih dvadesetak godina vrlo značajne promjene, a predviđa se još značajniji napredak u najbližoj budućnosti. Mnogo toga što je još nedavno bilo teško provedivo, u današnje vrijeme se relativno lako rješava primjenom računala. Međutim, razvoj tehničkih pomagala pretpostavlja odgovarajuće prilagođavanje onih koji s njima rade. To je prvenstveno potreba za modificiranim načinom mišljenja i izražavanje onim jezikom koji računalo »razumije«.

Tako npr. da bismo pomoću računala iscrtili neku krivulju, nije svejedno s kakvim oblikom njene jednadžbe raspoložemo. Obično je najpodesniji zapis te jednadžbe u parametarskom obliku.

### 2. GRAFIČKI PRIKAZ ELIPSE POGREŠAKA

Točnost određivanja pojedine točke u ravnini obično se procjenjuje na osnovu oblika, dimenzija i položaja njene elipse pogrešaka. Ima više načina za definiranje elipse pogrešaka, a poznato je (vidi npr. Lapaine 1988), da jednadžba takve elipse sa središtem u točki  $T_0(x_0, y_0)$  u pravokutnom koordinatnom sustavu  $x, y$  glasi

$$z^T K^{-1} z = t^2, \quad t = \text{const.}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

gdje je  $z = [\Delta x \ \Delta y]^T$ , a matrica

$$K = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xv} \\ m_{xv} & m_v^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

pozitivno definitna kovarijaciona matrica vektora  $z$ . Za  $t = 1$  govori se o standardnoj elipsi pogrešaka.

Za grafički prikaz elipse koriste se njene poluosi i kut između veće poluosi i pozitivnog smjera osi  $x$ . Ovi elementi lako se određuju nakon svođenja kvadratne forme

$$f = z^T K^{-1} z \quad (2.3)$$

\* Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.

na kanonski oblik. Naime, poznato je da se svaka realna simetrična matrica  $K$  može napisati u obliku

$$K = V \Lambda V^T, \quad (2.4)$$

gdje je  $V$  ortogonalna matrica, a  $\Lambda$  dijagonalna matrica. Pri tome su stupci matrice  $V$  ortonormirani svojstveni vektori matrice  $K$ , a dijagonalni elementi matrice  $\Lambda$  odgovarajuće svojstvene vrijednosti. Ove svojstvene vrijednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su rješenja kvadratne jednadžbe

$$\lambda^2 - (m_x^2 + m_y^2)\lambda + m_x^2 m_y^2 - m_{xy}^2 = 0. \quad (2.5)$$

Kako je po pretpostavci  $K$  pozitivno definitivna matrica, to je  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2 > 0$ . Iz (2.4) lako dobijemo

$$K^{-1} = V \Lambda^{-1} V^T, \quad (2.6)$$

pa na taj način kvadratna forma (2.3) prelazi u

$$f = z^T V \Lambda^{-1} V^T z = \zeta^T \Lambda^{-1} \zeta = \frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2}, \quad (2.7)$$

gdje smo označili

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = V^T z = V^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Dakle, zbog (2.7), možemo napisati (2.1) u obliku

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2} = t^2, \quad (2.9)$$

što je kanonski oblik jednadžbe elipse pogrešaka točke  $T_0$  u tzv. koordinatnom sustavu glavnih osi  $\xi, \eta$ . Iz jednadžbe (2.9) čitamo da su poluosi elipse

$$A = t\sqrt{\lambda_1}, \quad B = t\sqrt{\lambda_2}, \quad (2.10)$$

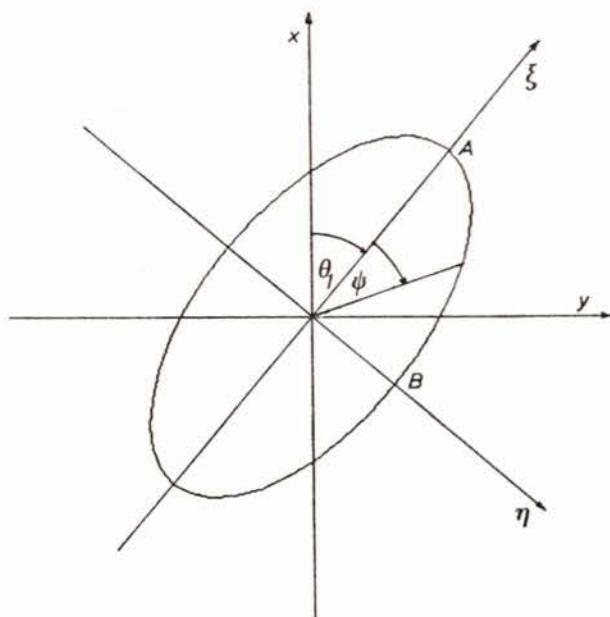
uz  $A \geq B$ , ako je  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . Pomoću (2.10) jednadžbu (2.9) možemo napisati u uobičajenom obliku

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1. \quad (2.11)$$

Ortogonalna matrica  $V$  može se prikazati u obliku

$$V = \begin{bmatrix} \cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \\ \sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

gdje smo s  $\Theta_1$  označili kut između velike poluosi (odnosno svojstvenog vektora kojem pripada veća svojstvena vrijednost  $\lambda_1$ ) i pozitivnog smjera osi x. Relaciju (2.8) možemo sad interpretirati kao rotaciju pravokutnog koordinatnog



Slika 1. Elipsa pogrešaka u općem položaju

sustava sa ishodištem u točki  $T_0$ , oko točke  $T_0$  za kut  $\Theta_1$ , u koordinatni sustav  $\xi, \eta$  (vidi sliku 1). Sam kut  $\Theta_1$  određen je (vidi npr. Lapaine 1988) sa

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{\lambda_1 - m_x^2}{m_{xy}} = \frac{m_{xy}}{\lambda_1 - m_y^2} \quad \text{za } \lambda_1 > \lambda_2 \quad (2.13)$$

$$\Theta_1 \text{ po volji} \quad \text{za } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Ako je  $\lambda_1 = \lambda_2$ , elipsa prelazi u kružnicu, a kut  $\Theta_1$  nije jednoznačno određen pa ga možemo birati po volji, npr. uzeti  $\Theta_1 = 0$ . Ovaj poseban slučaj se u geodetskoj literaturi ili uopće ne ističe, ili se ne formulira dovoljno precizno, kao npr. u (Perović 1984, Mihailović, Vračarić 1985).

Za grafički prikaz bilo koje krivulje pomoću računala nije pogodna njena jednadžba u implicitnom obliku, već njen parametarski oblik. Međutim, jednadžba pojedine krivulje može se napisati u parametarskom obliku na beskonačno mnogo načina. Tako se npr. u matematičkoj geodeziji ili kartografiji, elipsa parametrizira pomoću geografske širine  $\varphi$ , geocentrične širine  $\Psi$  ili reducirane širine  $u$ . Osim toga, parametarski prikaz elipse može se napisati primjenom racionalnih funkcija parametra  $\tau$ , a bez korištenja trigonometrijskih funkcija. Pomoću navedenih parametara kanonsku jednadžbu (2.11) možemo napisati u slijedećim parametarskim oblicima:

$$\xi = \frac{A^2 \cos \varphi}{\sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \eta = \frac{B^2 \sin \varphi}{\sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.14)$$

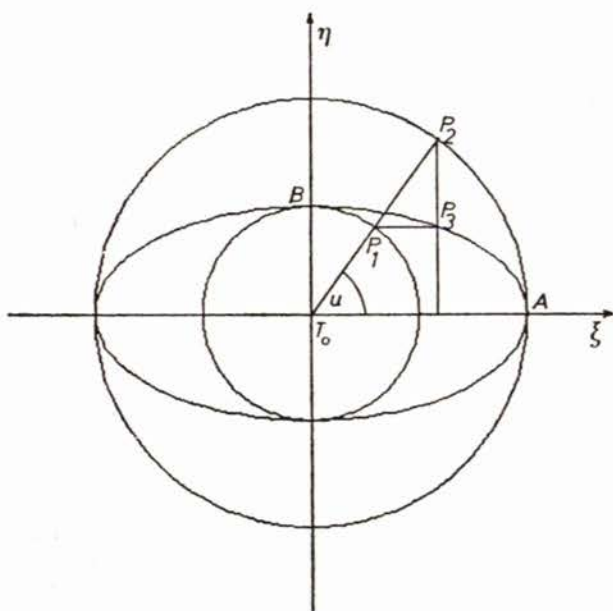
$$\xi = \frac{A B \cos \psi}{\sqrt{B^2 \cos^2 \psi + A^2 \sin^2 \psi}}, \quad \eta = \frac{A B \sin \psi}{\sqrt{B^2 \cos^2 \psi + A^2 \sin^2 \psi}} \quad (2.15)$$

$$\xi = A \cos u, \quad \eta = B \sin u \quad (2.16)$$

$$\xi = A \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \eta = B \frac{2\tau}{1 + \tau^2}. \quad (2.17)$$

Između parametara  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $u$  i  $\tau$  postoje odnosi

$$\operatorname{tg} u = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \psi = \frac{B}{A} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tau}{1 - \tau^2}. \quad (2.18)$$



Slika 2. Geometrijska konstrukcija elipse,  $P_1 P_3 \parallel T_0 A$ ,  $P_2 P_4 \parallel T_0 B$

Parametar  $u$  iz (2.16) zove se još i ekscentrična anomalija, a taj naziv potječe iz grčke astronomije (prema Marković 1961). Parametrizaciji (2.16) odgovara i poznata geometrijska konstrukcija elipse Philippea De La Hirea iz 1685. god. (prema Strubecker 1971). vidi sliku 2.

Iz relacija (2.15) — (2.17) vidimo da parametrizacije iste krivulje mogu biti po svojoj strukturi jednostavnije ili složenije. Parametrizacija (2.16) je prilično jednostavna, pa ćemo je koristiti i za grafički prikaz elipse pomoću

računala. Uzevši u obzir da se crtanje odvija u koordinatnom sistemu  $x, y$ , na osnovu relacija (2.8), (2.12) i (2.16) imamo

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = (V^T)^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\Delta x = A \cos \Theta_1 \cos u - B \sin \Theta_1 \sin u, \quad (2.20)$$

$$\Delta y = A \sin \Theta_1 \cos u + B \cos \Theta_1 \sin u,$$

odnosno konačno

$$x = M \Delta x + x_0, \quad (2.21)$$

$$y = M \Delta y + y_0,$$

gdje smo uveli faktor  $M$ , ukoliko želimo nacrtati elipsu u mjerilu  $M:1$  u odnosu na mjerilo koordinatnog sustava  $x, y$ . Kod primjene računala treba voditi računa još i o tome kako je postavljen koordinatni sistem na monitoru, odnosno papiru, te da mjerila u horizontalnom i vertikalnom smjeru često nisu međusobno jednaka.

### 3. OVISNOST KOVARIJACIONE MATRICE O ROTACIJI KOORDINATNOG SUSTAVA

Neka je u ravnini, u pravokutnom koordinatnom sustavu  $x, y$ , poznat približni položaj  $T_0(x_0, y_0)$  neke točke  $T(x, y)$ , s nesigurnošću koja je opisana kovarijacionom matricom

$$K = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

vektora  $[x \ y]^T$ , odnosno vektora

$$z = [\Delta x \ \Delta y]^T = [x - x_0 \ y - y_0]^T. \quad (3.2)$$

Zarotirajmo koordinatni sustav  $x, y$  oko ishodišta za kut  $\alpha$ . Tako dobiveni novi koordinatni sustav nazovimo  $s, t$ . Poznato je da je veza između koordinata jedne te iste točke  $T$  u ova dva koordinatna sustava određena relacijama

$$s = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad (3.3)$$

$$t = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

ili pisano u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Prema zakonu o prirastu pogrešaka iz (3.4) dobijemo kovarijacionu matricu  $K_\alpha$  vektora  $[s \ t]^T$

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} m_s^2 & m_{st} \\ m_{st} & m_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^T, \quad (3.5)$$

koju možemo koristeći (2.4) i (2.12) transformirati na oblik

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos^2(\alpha - \Theta_1) + \lambda_2 \sin^2(\alpha - \Theta_1) & (\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\alpha - \Theta_1) \cos(\alpha - \Theta_1) \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\alpha - \Theta_1) \cos(\alpha - \Theta_1) & \lambda_1 \sin^2(\alpha - \Theta_1) + \lambda_2 \cos^2(\alpha - \Theta_1) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdje je  $\Theta_1$  kut između veće poluosi elipse pogrešaka i pozitivnog smjera osi  $x$ , određen prema (2.13). Neka su  $A$  i  $B$  poluosi standardne elipse pogrešaka, a kut

$$u = \alpha - \Theta_1. \quad (3.7)$$

Tada se kovarijaciona matrica  $K_\alpha$  može ispisati u obliku

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} A^2 \cos^2 u + B^2 \sin^2 u & (B^2 - A^2) \sin u \cos u \\ (B^2 - A^2) \sin u \cos u & A^2 \sin^2 u + B^2 \cos^2 u \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Iz (3.5) i (3.8) čitamo

$$m_s = m_s^2(u) = A^2 \cos^2 u + B^2 \sin^2 u = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2u, \quad (3.9)$$

$$m_t = m_t^2(u) = A^2 \sin^2 u + B^2 \cos^2 u = \frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2u, \quad (3.10)$$

$$m_{st} = m_{st}(u) = (B^2 - A^2) \sin u \cos u = \frac{B^2 - A^2}{2} \sin 2u. \quad (3.11)$$

Kako je očito

$$m_s^2(u) + m_t^2(u) = A^2 + B^2, \text{ odnosno } m_t^2(u) = m_s^2\left(u \pm \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.12)$$

dalje ćemo promatrati samo  $m_s^2$  i  $m_{st}$ . Iz (3.9) i (3.11) lako nalazimo

$$\max m_s^2 = A^2, \quad \text{za } u = k\pi, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + k\pi; \quad (3.13)$$

$$\min m_s^2 = B^2, \quad \text{za } u = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad (3.14)$$

$$\max |m_{st}| = \frac{A^2 - B^2}{2}, \quad \text{za } u = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad (3.15)$$

$$\min |m_{st}| = 0, \quad \text{za } u = k \frac{\pi}{2}, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + k \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

Imajući u vidu (3.16), možemo postupku svodenja jednadžbe elipse na kanonski oblik (vidi 2. poglavlje) dati stohastičku interpretaciju prema kojoj se radi o prijelazu na novi pravokutni koordinatni sustav u kojem kovarijaciona matrica promatrane točke ima dijagonalni oblik.

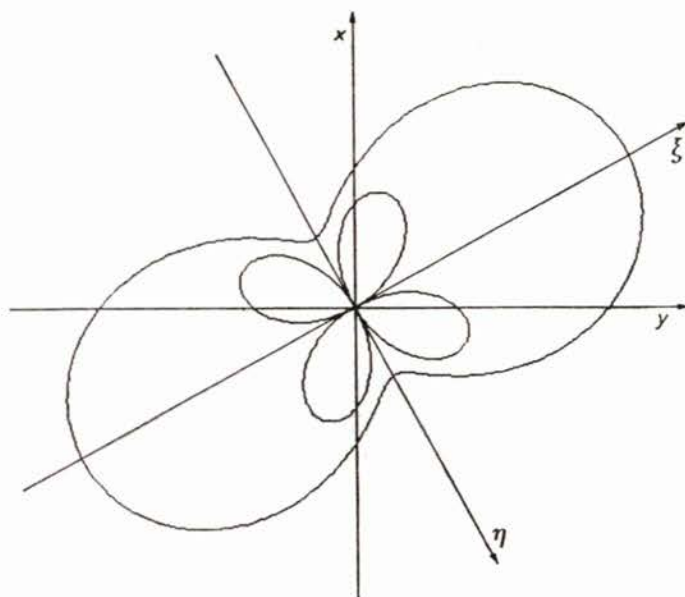
Interpretiramo li funkcionalne zavisnosti (3.9) i (3.11) u polarnom koordinatnom sistemu, možemo vidjeti da relacija (3.9) predstavlja jednadžbu nastalu »zbrojem« kružnice i Bernoullijeve lemniskate, dok je izraz (3.11) jednadžbe ruže s četiri laticice. Ovisnost elemenata kovarijacione matrice  $K_\alpha$  o kutu  $\alpha$  rotacije koordinatnog sustava može se prikazati grafički. U tu svrhu pogodno je, imajući u vidu (3.7), napisati odgovarajuće jednadžbe u parametarskom obliku

$$\xi = m_s^2 \cos u, \quad \eta = m_s^2 \sin u, \quad (3.17)$$

odnosno

$$\xi = m_{st} \cos u, \quad \eta = m_{st} \sin u, \quad (3.18)$$

i dalje postupiti prema (2.19) i (2.21), kao kod crtanja elipsi pogrešaka. Za ilustraciju vidjeti sliku 3.



Slika 3. Grafički prikaz zavisnosti  $m_s^2 = m_s^2(\alpha)$  i  $m_{st} = m_{st}(\alpha)$

Spomenimo još da su trag i determinanta kovarijacione matrice  $K$  invarijantne veličine s obzirom na razmatranu rotaciju koordinatnog sustava. Naime, ako su  $A$  i  $B$  poluosi standardne elipse pogrešaka, lako izvodimo:

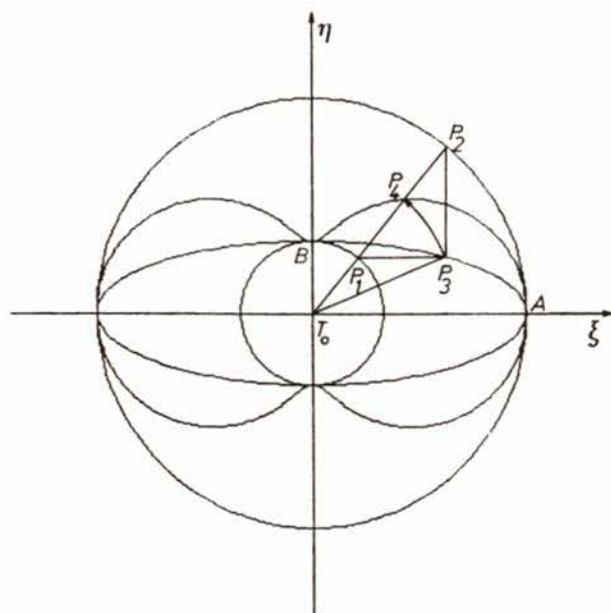
$$\begin{aligned} \text{tr}(K_{\alpha}) &= m_s^2 + m_t^2 = A^2 + B^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\Lambda) = \\ &= \text{tr}(\Lambda V^T V) = \text{tr}(V \Lambda V^T) = \text{tr}(K); \\ \det(K_{\alpha}) &= m_s^2 m_t^2 - m_{st}^2 = A^2 B^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \\ &= \det(V) \det(\Lambda) \det(V^T) = \det(V \Lambda V^T) = \det(K). \end{aligned}$$

Ova svojstva su zapravo posljedica relacije (3.5), tj. sličnosti matrica  $K$  i  $K_{\alpha}$  (Andelić 1979).

#### 4. GRAFIČKI PRIKAZ KRIVULJE POGREŠAKA

U nekim udžbenicima iz teorije pogrešaka i računa izjednačenja, kao npr. (Čubranić 1958, Reismann 1962, Čubranić 1980, Klak 1982, Pašalić 1984), navodi se da je krivulja pogrešaka vrlo bliza elipsi pogrešaka, odnosno da se malo razlikuje od elipse. Već sam pogled na slike 4 ili 5 dovoljan je da nas uvjeri kako se dvije spomenute krivulje mogu prilično razlikovati. Krivulja pogrešaka je malo složenija od elipse, pa je to (vidi npr. Čubranić 1958, Gotthard 1968, Klak 1982, Pašalić 1984) vjerojatno razlog nastojanjima da ju se je željelo zamijeniti nekom jednostavnijom krivuljom, npr. elipsom (Gotthard 1968) ili pomoću dva kružna luka Höpcke 1980). Pokazat ćemo da se u današnje vrijeme bez velike muke mogu prevazići nekadašnje poteškoće.

Krivulja pogrešaka je kraći naziv za krivulju srednjih pogrešaka položaja točke koja se može definirati naviše načina, a u geodetskoj literaturi se još



Slika 4. Geometrijska konstr. krivulje pogrešaka,  $T_0P_3 = T_0P_4$

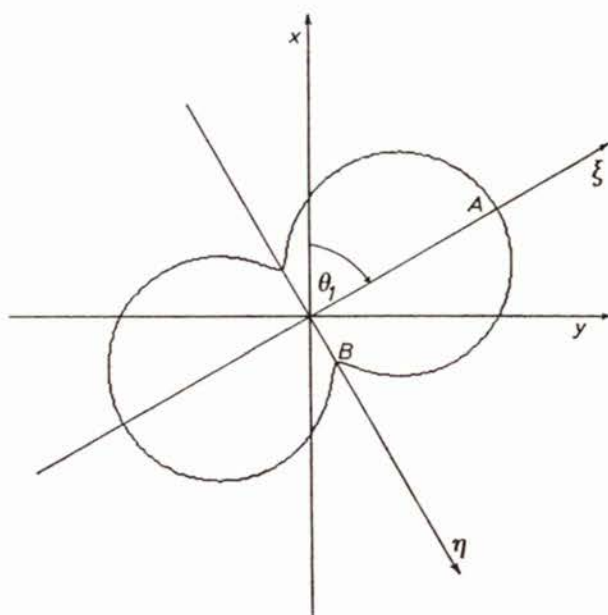


naziva srednja krivulja pogrešaka, podera ili nožišna krivulja. Dogovorimo se da je ona grafički prikaz funkcionalne zavisnosti srednje pogreške pravokutne koordinate neke točke o kutu  $\alpha$  rotacije koordinatnog sustava. S obzirom na relaciju (3.12) dovoljno je promatrati funkciju

$$m_s = m_s(\alpha), \quad (4.1)$$

koja se zbog (3.7) i (3.9) može napisati u obliku

$$m_s = \sqrt{A^2 \cos^2 u + B^2 \sin^2 u}. \quad (4.2)$$



Slika 5. Krivulja pogrešaka u općem položaju

Pogledamo li parametarske jednadžbe elipse (2.16), možemo neposredno zaključiti da je  $m_s$  iz (4.2) jednako duljini korespondentnog radij-vektora elipse. Odatle slijedi jednostavna geometrijska konstrukcija krivulje pogrešaka na osnovu standardne elipse pogrešaka, vidi sliku 4. Iz (4.2) se lako vidi da je

$$\max m_s = A, \quad \text{za } u = k\pi, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + k\pi, \quad (4.3)$$

$$\min m_s = B, \quad \text{za } u = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{odnosno za } \alpha = \Theta_1 + \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (4.4)$$

što znači da se ekstremne vrijednosti od  $m_s$  po iznosu i položaju poklapaju sa poluosima standardne elipse pogrešaka. Za grafički prikaz krivulje pogrešaka

poslužiti ćemo se njenom jednadžbom u parametarskom obliku u koordinatnom sustavu glavnih osi

$$\xi = m_s \cos u, \quad \eta = m_s \sin u, \quad (4.5)$$

i dalje postupiti prema (2.19) i (2.21), kao kod crtanja elipsi pogrešaka. Za ilustraciju vidjeti sliku 5.

Iz (4.5) možemo eliminiranjem parametra u lako dobiti jednadžbu krivulje pogrešaka u implicitnom obliku

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2, \quad (4.6)$$

koji se često pojavljuje u geodetskoj literaturi kod razmatranja krivulje pogrešaka, ali koji nema praktičnog značaja. Osim toga, u geodetskoj literaturi se redovito navodi, a ponekad i dokazuje (kao npr. u Hristow 1961, Gotthard 1968), da je krivulja pogrešaka nožišna krivulja standardne elipse pogrešaka. To znači da je pravac koji prolazi proizvoljnom točkom krivulje pogrešaka, a okomito na pripadni radij-vektor, ujedno tangenta na standardnu elipsu pogrešaka. Međutim, isticanjem ovog svojstva samo se stvaraju nepotrebne komplikacije, a ne dobiva na mogućnosti jednostavnijeg određivanja, odnosno konstrukcije krivulje.

Zanimljivo je da se lako može odrediti površina P omeđena krivuljom pogrešaka:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \oint m_s^2(u) du = 2 \int_0^{\pi/2} (A^2 \cos^2 u + B^2 \sin^2 u) du = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2u \right] du = (A^2 + B^2) \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Poznato je da je površina E elipse

$$E = A B \pi, \quad (4.8)$$

pa se iz (4.7) i (4.8) lako može izvesti jednostavna relacija

$$P = E + \frac{\pi}{2} (A - B)^2. \quad (4.9)$$

Potražimo još vezu između duljina radij-vektora istog smjera za točku na standardnoj elipsi pogrešaka i za točku na krivulji pogrešaka. Kvadrat duljine radij-vektora u smjeru  $u$  za točku na krivulji pogrešaka određen je relacijom (3.9), a za kvadrat duljine radij-vektora  $r_e$  u istom smjeru  $u$  za točku na standardnoj elipsi pogrešaka lako se iz (2.15) dobije

$$r_e^2(u) = \frac{A^2 B^2}{B^2 \cos^2 u + A^2 \sin^2 u}. \quad (4.10)$$

Iz (3.9) i (4.10) eliminiranjem parametra  $u$  dobijemo

$$m_s^2(u) + \frac{A^2 B^2}{r_e^2(u)} = A^2 + B^2, \quad (4.11)$$

odnosno zbog (3.12)

$$m_t(u) r_e(u) = A B. \quad (4.12)$$

Može se pokazati da je

$$\max [m_s^2(u) - r_e^2(u)] = (A - B)^2, \quad (4.13)$$

što se postiže za

$$r_e(u) = \sqrt{A B}, \quad \text{odnosno } m_s(u) = \sqrt{A^2 + B^2 - A B}, \quad (4.14)$$

u smjerovima  $u$  određenim sa

$$\operatorname{tg}^2 u = \frac{B}{A}. \quad (4.15)$$

## 5. ZAKLJUČAK

Za grafički prikaz elipse pogrešaka, krivulje pogrešaka, ili bilo koje druge krivulje pomoću računala pogodan je parametarski oblik njene jednadžbe. Kako se jednadžba pojedine krivulje može napisati u parametarskom obliku na mnogo načina, koristit ćemo onaj oblik koji je što jednostavniji.

Primjenom računala lako se može grafički prikazati utjecaj rotacije pravokutnog koordinatnog sistema na kovarijacionu matricu pojedine točke.

Krivulja pogrešaka točke može se definirati kao grafički prikaz funkcionalne zavisnosti srednje pogreške pravokutne koordinate te točke o kutu rotacije koordinatnog sustava. Crtanje ove krivulje nastojalo se u prošlosti izbjeći, a u ovom radu je pokazano kako se nekadašnje poteškoće mogu jednostavno prevazići.

Zahvaljujem se recenzentima na korisnim primjedbama.

## LITERATURA

- Anđelić, T. P. (1979) *Matrice*. Građevinska knjiga, Beograd, (četvrto izdanje) 1979.  
 Čubranić, N. (1958) *Račun izjednačenja*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1958 (drugo izdanje 1967).  
 Čubranić, N. (1980) *Teorija pogrešaka s računom izjednačenja*. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1980.  
 Gotthard, E. (1968) *Einführung in die Ausgleichsrechnung*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1968  
 Höpcke, W. (1980) *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin, 1980.

- Hristow, W. K. (1961) *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und Methode der Kleinsten Quadrate*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1961.
- Klak, S. (1982) *Teorija pogrešaka i račun izjednačenja*. Sveučilišna naklada Liber, 1982.
- Lapaine, M. (1988) Određivanje elemenata elipsi pogrešaka. *Geodetski list*, 10—12, 1988, 299—307.
- Marković, Ž. (1961) *Uvod u višu analizu*, I dio, drugi svezak. Sveučilište u Zagrebu, (šesto izdanje) 1961.
- Mihailović, K., K. Vračarić (1985) *Geodezija III*. Građevinski fakultet, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- Pašalić, S. (1984) *Račun izravnjanja*. Građevinski fakultet, Sarajevo, 1984.
- Perović, G. (1984) *Račun izravnjanja I*. Građevinski fakultet, Naučna knjiga, Beograd, 1984.
- Strubecker, K. (1971) *Nacrtna geometrija* (prijevod s njemačkog jezika). Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- Reissmann, G. (1962) *Die Ausgleichsrechnung*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

#### SAŽETAK

U radu se razmatra grafičko prikazivanje pomoću računala elipse pogrešaka, krivulje pogrešaka i funkcionalne zavisnosti elemenata kovarijacione matrice točke o rotaciji pravokutnog koordinatnog sustava. Osim toga izvedena su dva nova svojstva o međusobnom odnosu elipse i krivulje pogrešaka.

#### ABSTRACT

The paper deals with the graphic computer-aided presentation of the error ellipse, the error curve, and the functional dependence of covariation matrix elements of the point on the rotation of the cartesian coordinate system. Two new properties regarding the relationship between the error ellipse and the error curve have been derived as well.

Primljeno: 1989-09-30