UDK 528.22:629.783
Originalni znanstveni rad

JEDNA MOGUĆNOST ODREĐIVANJA PARAMETARA ELIPSOIDA NA OSNOVU POZNATIH PRAVOUGLIH KOORDINATA TAČAKA NA GEOIDU

Jovan STEVANOVIĆ — Beograd*

O ODREĐIVANJU KOORDINATA JEDNE TAČKE

Ne ulazeći u to kako se, opažanjem veštačkih zemljinih satelita, kojim instrumentima i kojim metodama, određuju koordinate na fizičkoj površini Zemlje u pravouglom koordinatnom sistemu kod koga se z osa poklapa sa obrtnom osom Zemlje a x i y ose su u ravni ekvatora, može se napomenuti da se, na osnovu više merenih podataka, koordinate x, y i z određuju posredno izravnavanjem. Ako je na tački »i« izmereno 1, 2..j..k podataka, svaki mereni podatak omogućuje jednu jednačinu popravaka, a nakon linearizovanja, jednačine popravaka bi bile:

$$v_{ij} = \bar{a}_{ij}\,x_i + \bar{b}_{ij}\,y_i + \bar{c}_{ij}\,z_i + f_{ij} \tag{1}$$

ili u matričnom obliku:

$$V_i = A_i\,X_i + f_i. \tag{2}$$

Preko normalnih jednačina:

$$\bar{N}_i\,X_i + \bar{n}_i = 0, \tag{3}$$

gde je:

$$\bar{N}_i = \begin{vmatrix} [\bar{a}\bar{a}]_i & [\bar{a}\bar{b}]_i & [\bar{a}\bar{c}]_i \\ [\bar{a}\bar{b}]_i & [\bar{b}\bar{b}]_i & [\bar{b}\bar{c}]_i \\ [\bar{a}\bar{c}]_i & [\bar{b}\bar{c}]_i & [\bar{c}\bar{c}]_i \end{vmatrix} \tag{4}$$

i inverznih jednačina:

$$\bar{X}_i = -\,\bar{N}_i^{-1}\,\bar{n}_i = -\,\bar{Q}_{xi}\,\bar{n}_i \tag{5}$$

računaju se priraštaji a zatim i koordinate dotične tačke.

* Prof. dr Jovan Stevanović, Rudarsko-geološki fakultet Beograd, Djušina 7.

Ove koordinate su u korelaciji koju izražava matrica koeficijenata težina Qx_i. Pri kasnijem korišćenju koordinata za određivanje parametara osrednjenog elipsoida treba ovu korelativnost uzimati u obzir.

Napomena: Simbolima a, b, c se obeležavaju poluose elipsoida. Tim istim simbolima se obeležavaju parcijalni izvodi i pri posrednom i pri uslovnom izravnanju. Zbog ovoga će:

— odgovarajući parcijalni izvodi kod navedenog posrednog izravnanja biti obeleženi sa $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$,

— parcijalni izvodi pri kasnijem uslovnom izravnanju sa $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}}$

— poluose elipsoida biće obeležene sa a, b, c.

Na osnovu ovako određenih koordinata tačke na fizičkoj površini Zemlje i nivelanjem određene nadmorske visine tačke sa uvedenom ortometrijskom popravkom, na poznat način računaju se koordinate odnosne tačke svedene na geoid. Neka su ove koordinate za tačku »i« obeležene sa x_i, y_i, z_i. I ovaj proces svođenja koordinata na geoid ima za posledicu odgovarajuću korelaciju između koordinata jedne tačke a trebalo bi ispitati njen značaj.

JEDNAČINA ELIPSOIDA

U opštem slučaju, elipsoid koji je određen na osnovu niza tačaka na geoidu ne mora da ima centar u koordinatnom početku a ose elipsoida ne mora da se poklapaju sa koordinatnim osama. Pošto uglovi između koordinatnih osa i osa elipsoida neće biti veliki, može se opšti oblik jednačine elipsoida napisati u vidu:

$$\frac{(x - p - \omega y + \psi z)^2}{a^2} + \frac{(y - q + \omega x - \varepsilon z)^2}{c^2} + \frac{(z - r - \psi x + \varepsilon y)^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Ovde su:

— p, q, r koordinate centra elipsoida,

— a, c, b odgovarajuće poluose elipsoida kako se u glavnom koriste u geodeziji, pri čemu će se a i c malo međusobno razlikovati,

— ε, ψ, ω odgovarajući uglovi rotacije osa elipsoida u odnosu na koordinatne ose x, y i z.

Napomena: Za diskusiju je da li poći od jednačine za dvoosni ili troosni elipsoid. Ako se radi uopštenog izvođenja pođe od jednačine za troosni elipsoid, neophodno je prethodnom analizom ustanoviti približno geografsku dužinu pravca jedne poluose, a zatim zarotirati oko z ose u ekvatorskoj ravni za tu dužinu koordinatni sistem. Navedena jednačina ima smisla ako se ovako transformišu koordinate svih tačaka na geoidu. Međutim, možda je bolje ići na dvoosni elipsoid za koji bi bilo c = a, a rotacija oko z ose ne bi bila od značaja.

USLOVNE JEDNAČINE DATIH TAČAKA

Koordinate tačke određene na geoidu, zbog nepoklapanja geoida i elipsoida kao i zbog grešaka koordinata, neće zadovoljiti jednačinu elipsoida, a da bi je zadovoljile potrebno je da koordinate dobiju popravke v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}. Ako se ispravljene koordinate obeleže sa $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$, biće:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + v_{x_i}, \\ \bar{y}_i &= y_i + v_{y_i}, \\ \bar{z}_i &= z_i + v_{z_i}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ovako ispravljene koordinate će zadovoljiti jednačinu elipsoida u tački »i«, a sama jednačina bi dobila oblik:

$$\begin{aligned} \varphi_i = {} & \frac{[x_i + v_{x_i} - p - \omega(y_i + v_{y_i}) + \psi(z_i + v_{z_i})]^2}{a^2} + \\ & + \frac{[y_i + v_{y_i} - q + \omega(x_i + v_{x_i}) - \varepsilon(z_i + v_{z_i})]^2}{c^2} + \\ & + \frac{[z_i + v_{z_i} - r - \psi(x_i + v_{x_i}) + \varepsilon(y_i + v_{y_i})]^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ovo bi bila uslovna jednačina koja odgovara tački i. Ako se postave za svaku od n određenih tačaka po jedna uslovna jednačina, mogu se odrediti navedeni nepoznati parametri elipsoida koji će najbolje da se prilagođava geoidu, uz uslov da suma kvadrata navedenih popravaka koordinata bude minimalna. Ako se radi o poznatim tačkama na geoidu raspoređenih u jednom regionu, dobiće se elipsoid koji se najbolje prilagođava geoidu u tom regionu. Ako su pak tačke raspoređene po celoj Zemlji, dobiće se elipsoid koji se najbolje prilagođava geoidu u celini.

LINEARIZACIJA USLOVNIH JEDNAČINA

Ako se prethodno odrede približne vrednosti za parametre elipsoida mogu se u opštem slučaju parametri izraziti kao:

$$\begin{aligned} &p = p_0 + \delta p, && q = q_0 + \delta q, && r = r_0 + \delta r, \\ &a = a_0 + \delta a, && c = c_0 + \delta c, && b = b_0 + \delta b, \\ &\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon, && \psi = \psi_0 + \delta\psi, && \omega = \omega_0 + \delta\omega. \end{aligned} \tag{9}$$

Za male priraštaje parametara mogu se uslovne jednačine razviti u red:

$$\begin{aligned} \varphi_i = {} & \bar{\bar{a}}_i v_{x_i} + \bar{\bar{b}}_i v_{y_i} + \bar{\bar{c}}_i v_{z_i} + A_i \delta a + B_i \delta b + C_i \delta c + \\ & + D_i \delta p + E_i \delta q + F_i \delta r + G_i \delta\varepsilon + H_i \delta\psi + I_i \delta\omega + g_i = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

U ovim jednačinama je:

$$\bar{\bar{a}}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}, \quad \bar{\bar{b}}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}, \quad \bar{\bar{c}}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i},$$

$$A_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a}, \quad B_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial b}, \quad C_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial c}, \quad D_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial p}, \quad E_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q}, \quad F_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r},$$

$$G_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon}, \quad H_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi}, \quad I_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega}. \tag{11}$$

Ovi parcijalni izvodi se računaju za navedene približne vrednosti parametara i za poznate vrednosti koordinata tačaka na geoidu. Slobodan član bi bio:

$$g_i = \frac{(x_i - p_0 - \omega_0 y_i + \psi_0 z_i)^2}{a_0^2} + \frac{(y_i - q_0 + \omega_0 x_i - \varepsilon_0 z_i)^2}{c_0^2} + \frac{(z_i - r_0 - \psi_0 x_i + \varepsilon_0 y_i)^2}{b_0^2} - 1 \tag{12}$$

PROBLEM TEŽINA KOORDINATA

Ranije je navedeno da su koordinate jedne tačke u korelaciji koju izražava korelaciona matrirca $\bar{Q}_x$ u jedn. (5). Ako su merenja na svim tačkama više manje ujednačene tačnosti, tada bi matrica težina koordinata bilo koje tačke bila:

$$p_{x_i} = \bar{Q}_{x_i}^{-1} = \bar{N}_i. \tag{13}$$

Ali, ako postoji osetna razlika u tačnosti merenja na pojedinim tačkama, matrica težina tačke »i« bi mogla da bude:

$$p_{x_i} = \frac{1}{m_i^2} \bar{Q}_{x_i}^{-1}.$$

Ovde je m_i srednja kvadratna greška merenja dobivena kroz proces izravnanja podataka te tačke.

Sa druge strane, ako bi tačke bile ravnomerno raspoređene, tada bi svaka od njih reprezentovala više-manje jednak deo površine Zemlje, pa bi bilo logično da svaka tačka ima podjednak uticaj na određivanje parametara elipsoida. Ali, što je češći slučaj, ako one nisu raspoređene ravnomerno, tada je logično smatrati da usamljena tačka koja reprezentuje znatno veći deo površine Zemlje nego druge međusobno bliske tačke, treba da ima veći uticaj na određivanje parametara elipsoida. Zbog ovoga težina usamljene tačke treba da bude veća od težina bliskih tačaka. Ovo sugerira potrebu da težine, pored svega navedenog, treba da zavise i od veličine dela površine Zemlje koga bi reprezentovala ta tačka. Bez udubljivanja u okviru ovog rada u taj problem, neka je ta zavisnost s_i^2, pa bi matrica težina za jednu tačku mogla da bude:

$$p_{x_i} = \frac{s_i^2}{m_i^2} \bar{Q}_{x_i}^{-1} = \frac{s_i^2}{m_i^2} \bar{N}_i , \tag{15}$$

Ovim izrazom nije obuhvaćena korelativnost koordinata koja je posledica svođenja koordinata na geoid.

USLOV MINIMUMA ZA POPRAVKE KOORDINATA I NORMALNE JEDNAČINE

Ako se korelaciona matrica celog sistema, koja je kvazidijagonalna matrica sastavljena od pojedinih matrica $\bar{Q}_x^{-1}$ obeleži sa Q_x^{-1}, na uobičajen način, uslov minimuma za kombinovano uslovno-posredno izravnanje bi bio:

$$W = V_x^* Q_x^{-1} V_x - 2K\varphi = \min. \tag{16}$$

Obzirom da su u korelaciji samo koordinate jedne tačke, u delimično razvijenom obliku, imajući u vidu jednačine (5), (10) i (15), ovaj izraz bi bio:

$$W = \sum_1^n {}_i \frac{s_i^2}{m_i^2} \Big\{ ([\bar{a}\bar{a}]_i v_{x_i} v_{x_i} + [\bar{a}\bar{b}]_i v_{x_i} v_{y_i} + [\bar{a}\bar{c}]_i v_{x_i} v_{z_i} + [\bar{a}\bar{b}]_i v_{x_i} v_{y_i} +$$

$$+ [\bar{b}\bar{b}]_i v_{y_i} v_{y_i} + [\bar{b}\bar{c}]_i v_{y_i} v_{z_i} + [\bar{a}\bar{c}]_i v_{x_i} v_{z_i} + [\bar{b}\bar{c}]_i v_{y_i} v_{z_i} + [\bar{c}\bar{c}]_i v_{z_i} v_{z_i}) \Big\} -$$

$$- 2K_1 \varphi_1 - 2K_2 \varphi_2 - \ldots - 2K_n \varphi_n = \min.$$

Ova funkcija imaće minimum ako je:

$$\frac{\partial W}{\partial v_{x_i}} = \frac{s_i^2}{m_i^2} (2 [\bar{a}\bar{a}]_i v_{x_i} + 2 [\bar{a}\bar{b}]_i v_{y_i} + 2 [\bar{a}\bar{c}]_i v_{z_i}) - 2K_i \bar{\bar{a}}_i = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial v_{y_i}} = \frac{s_i^2}{m_i^2} (2 [\bar{a}\bar{b}]_i v_{x_i} + 2 [\bar{b}\bar{b}]_i v_{y_i} + 2 [\bar{b}\bar{c}]_i v_{z_i}) - 2K_i \bar{\bar{b}}_i = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial W}{\partial v_{z_i}} = \frac{s_i^2}{m_i^2} (2 [\bar{a}\bar{c}]_i v_{x_i} + 2 [\bar{b}\bar{c}]_i v_{y_i} + 2 [\bar{c}\bar{c}]_i v_{z_i}) - 2K_i \bar{\bar{c}}_i = 0.$$

Isto tako za uslov minimuma mora biti:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = - 2 \Sigma K_i A_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial b} = - 2 \Sigma K_i B_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial c} = - 2 \Sigma K_i C_i = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial p} = -2\Sigma K_i D_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = -2\Sigma K_i E_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = -2\Sigma K_i F_i = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = -2\Sigma K_i G_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega} = -2\Sigma K_i H_i = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi} = -2\Sigma K_i I_i = 0, \tag{19}$$

Iz sistema jednačina (18) mogu se rešavanjem sistema, na isti način kao kod jednačina (5), preko inverzne matrice $\bar{Q}_{x_i}$ odrediti popravke:

$$v_{x_i} = \frac{m_i^2}{s_i^2}(Q_{xx_i} K_i \bar{\bar{a}}_i + Q_{xy_i} K_i \bar{\bar{b}}_i + Q_{xz_i} K_i \bar{\bar{c}}_i),$$

$$v_{y_i} = \frac{m_i^2}{s_i^2}(Q_{xy_i} K_i \bar{\bar{a}}_i + Q_{yy_i} K_i \bar{\bar{b}}_i + Q_{yz_i} K_i \bar{\bar{c}}_i), \tag{20}$$

$$v_{z_i} = \frac{m_i^2}{s_i^2}(Q_{xz_i} K_i \bar{\bar{a}}_i + Q_{yz_i} K_i \bar{\bar{b}}_i + Q_{zz_i} K_i \bar{\bar{c}}_i).$$

Zamenom ovako određenih popravaka u uslovnu jednačinu φ_i (jednačina (10)) dobija se:

$$\varphi_i = K_i \left\{ \frac{m_i^2}{s_i^2}(\bar{Q}_{xx_i} \bar{\bar{a}}_i \bar{\bar{a}}_i + \bar{Q}_{xy_i} \bar{\bar{a}}_i \bar{\bar{b}}_i + \bar{Q}_{xz_i} \bar{\bar{a}}_i \bar{\bar{c}}_i + \bar{Q}_{xy_i} \bar{\bar{a}}_i \bar{\bar{b}}_i + \bar{Q}_{yy_i} \bar{\bar{b}}_i \bar{\bar{b}}_i + \right.$$

$$\left. + \bar{Q}_{yz_i} \bar{\bar{b}}_i \bar{\bar{c}}_i + \bar{Q}_{xz_i} \bar{\bar{a}}_i \bar{\bar{c}}_i + \bar{Q}_{yz_i} \bar{\bar{b}}_i \bar{\bar{c}}_i + \bar{Q}_{zz_i} \bar{\bar{c}}_i \bar{\bar{c}}_i) \right\} +$$

$$+ A_i \,\delta a + B_i \,\delta b + C_i \,\delta c + D_i \,\delta p + E_i \,\delta q + F_i \,\delta r + G_i \,\delta \varepsilon +$$

$$+ H_i \,\delta \psi + I_i \,\delta \omega + g_i = 0 \tag{21}$$

Ako se izraz u velikoj zagradi obeleži sa P_i i jednačina reši po K_i, biće:

$$K_i = -\frac{A_i}{P_i}\delta a - \frac{B_i}{P_i}\delta b - \frac{C_i}{P_i}\delta c - \frac{D_i}{P_i}\delta p - \frac{E_i}{P_i}\delta q - \frac{F_i}{P_i}\delta r - \frac{G_i}{P_i}\delta \varepsilon -$$

$$-\frac{H_i}{P_i}\delta \psi - \frac{I_i}{P_i}\delta \omega - \frac{g_i}{P_i}. \tag{22}$$

Zamenom izraza za K_i u prvu a zatim u ostale jednačine sistema (19), dobiće se odgovarajuće normalne jednačine.

SLUČAJ DVOOSNOG ELIPSOIDA

Za dvoosni elipsoid jednačina (8) bi bila:

$$\varphi_i = \frac{\{x_i + v_{x_i} - p + \psi (z_i + v_{z_i})\}^2 + \{y_i + v_{y_i} - q - \varepsilon (z_i + v_{z_i})\}^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{\{z_i + v_{z_i} - r - \psi (x_i + v_{x_i}) + \varepsilon (y_i + v_{y_i})\}^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{23}$$

U jednačini (9) mogu se usvojiti da su približne vrednosti parametara:

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = 0, \qquad \varepsilon_0 = 0, \qquad \psi_0 = 0.$$

Za poluose a i b mogu se usvojiti vrednosti nekog već određenog elipsoida.

Potrebni parcijalni izvodi sa navedenim približnim vrednostima, polazeći od jedn. (23), bi bili:

$$\bar{a}_i = \frac{2x_i}{a_0^2}, \qquad \bar{b}_i = \frac{2y_i}{a_0^2}, \qquad \bar{c}_i = \frac{2z_i}{b_0^2}, \tag{23'}$$

$$A_i = -\frac{2(x_i^2 + y_i^2)}{a_0^3}, \quad B_i = -\frac{2z_i^2}{b_0^3}, \quad D_i = -\frac{2x_i}{a_0^2}, \quad E_i = -\frac{2y_i}{a_0^2},$$

$$F_i = -\frac{2z_i}{b_0^2}, \quad G_i = -\frac{2y_i z_i}{a_0^2} + \frac{2z_i y_i}{b_0^2}, \quad H_i = \frac{2x_i z_i}{a_0^2} - \frac{2x_i z_i}{b_0^2}. \tag{24}$$

Slobodan član bi bio:

$$g_i = \frac{x_i^2}{a_0^2} + \frac{y_i^2}{a_0^2} + \frac{z_i^2}{b_0^2} - 1. \tag{25}$$

Koristeći odgovarajuće parcijalne izvode u skladu sa jednačinom (21), izraz obeležen sa P_i bi bio:

$$P_i = \frac{m_i^2}{s_i^2} \left(\bar{Q}_{xx_i} \frac{4x_i^2}{a_0^4} + 2\bar{Q}_{xy_i} \frac{4x_i y_i}{a_0^4} + 2\bar{Q}_{xz_i} \frac{4x_i z_i}{a_0^2 b_0^2} + \bar{Q}_{yy_i} \frac{4y_i^2}{a_0^4} + \right.$$

$$\left. + 2\bar{Q}_{yz_i} \frac{4y_i z_i}{a_0^2 b_0^2} + \bar{Q}_{zz_i} \frac{4z_i^2}{b_0^4} \right). \tag{26}$$

Ako se ima u vidu zadnji izraz za P_i i unesu navedeni izrazi za parcijalne izvode (26) u normalne jednačine, pri čemu je $\delta c = o$ i $\delta \omega = o$, dobiće se normalne jednačine za dvoosni elipsoid.

KONSTANTE IZRAVNANJA

Navedeni parcijalni izvodi zavise od usvojenih približnih vrednosti parametara elipsoida, koji su konstantni za svaku tačku, i od koordinata tačke. Zbog ovoga se koeficijenti normalnih jednačina sastoje od konstantnog dela i dela pod znakom sumiranja. Ako se uvedu tekući indeksi »l« i »m« za oznake A, B,... H, može bilo koji koeficijenat u normalnim jednačinama, označen kao N_{lm}, da se napiše kao:

$$N_{lm} = k_{lm} \, u_{lm}, \tag{27}$$

gde je:

k_{lm} — deo koji zavisi od parametara elipsoida i koji je konstantan

u_m — deo koji je pod znakom sumiranja a zavisi od koordinata tačaka.

Obzirom na način formiranja normalnih jednačina, vrednosti za konstantne članove bi bile:

$$\begin{gathered}
k_{AA} = \frac{4}{a_0^6}, \quad k_{AB} = \frac{4}{a_0^3\, b_0^3}, \quad k_{AD} = + \frac{4}{a_0^5}, \quad k_{AE} = + \frac{4}{a_0^5}, \quad k_{AF} = + \frac{4}{a_0^3\, b_0^3}, \\
k_{AG} = \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{AH} = - \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{BB} = \frac{4}{b_0^6}, \quad k_{BD} = + \frac{4}{a_0^2\, b_0^2}, \\
k_{BE} = + \frac{4}{a_0^2\, b_0^3}, \quad k_{BF} = + \frac{4}{b_0^5}, \quad k_{BG} = \frac{4}{b_0^3}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{BH} = - \frac{4}{b_0^3}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \\
k_{DD} = \frac{4}{a_0^4}, \quad k_{DE} = \frac{4}{a_0^4}, \quad k_{DF} = \frac{4}{a_0^2\, b_0^2}, \quad k_{DG} = + \frac{4}{a_0^2}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \\
k_{DH} = - \frac{4}{a_0^2}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{EE} = \frac{4}{a_0^4}, \quad k_{EF} = \frac{4}{a_0^2\, b_0^2}, \quad k_{EG} = + \frac{4}{a_0^2}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \\
k_{EH} = - \frac{4}{a_0^2}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{FF} = \frac{4}{b_0^4}, \quad k_{FG} = + \frac{4}{b_0}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \\
k_{FH} = - \frac{4}{b_0^2}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right), \quad k_{GG} = 4\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right)^2, \quad k_{GH} = - 4\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right)^2, \\
k_{HH} = 4\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}\right)^2.
\end{gathered} \tag{28}$$

Sa navedenim oznakama za konstantne delove normalnih jednačina, za dvoosni elipsoid, matrica normalnih jednačina može da se napiše u vidu kako je dato u prilogu. Rešavanjem ovih normalnih jednačina dobiće se priraštaji parametara a preko jednačina (9), i parametri elipsoida koji se najbolje prilagođava geoidu odnosno poznatim tačkama na geoidu.

SLUČAJ AKO SE ZANEMARI KORELACIJA KOORDINATA

Ako iz nekih razloga (dug vremenski period opažanja, različiti uslovi opažanja u raznim zemljama, možda nepostojeća dokumentacija ili je teško sakupiti dokumentaciju o izravnanju koordinata pojedinih tačaka) nije izvodljivo u jednačinama (15) i (16) obezbediti korelacionu matricu Q_x^{-1}, odnosno ako ima razloga smatrati da je ona jedinična matrica, jednačina (26) za P_i bi dobila oblik:

$$P_i = \left(\frac{4x_i}{a_0^4} + \frac{4y_i}{a_0^4} + \frac{4z_i^2}{b_0^4}\right)\frac{m_i^2}{s_i}. \tag{29}$$

U koliko za to postoje razlozi, u zadnjoj jednačini može da se smatra da je $m_i = 1$, odnosno, ako su tačke ravnomerno raspoređene i ako ima razloga, može da se smatra i da je $s_i = 1$.

ZAVRŠNE NAPOMENE

Napred je izložena jedna mogućnost određivanja parametara elipsoida koji bi se najbolje prilagođavao geoidu, povodom koje treba napomenuti sledeće:

— Nije bilo realnih mogućnosti da predlog bude testiran. (Za proveru trebalo bi raspolagati koordinatama tačaka na geoidu kao i odgovarajućom kompjuterskom podrškom). Zbog ovoga, navedena izvođenja treba prihvatiti sa određenom rezervom.

— U koliko bi predlog iznet u ovom radu bio prihvatljiv, treba razrešiti dileme u vezi sa težinama.

— Isto tako, mora uslediti opredeljenje za dvoosni ili troosni elipsoid, a ako bi ono bilo za troosni elipsoid, morala bi da usledi dorada teorije.

— Ako pretpostavka o navedenim približnim vrednostima za parametre elipsoida predstavlja nedovoljnu približnost, morala bi da usledi dorada teorije, tj. parcijalni izvodi kod uslovnog izravnanja bi bili drugojačiji, a svakako komplikovaniji. Međutim, to bi bilo tehničko pitanje koje je lako rešiti.

— Mislim da i u sklopu ovakvog prilaza problemu ima mesta teoriji o kolokaciji.

— Ako se oceni da je navedeno u ovom tekstu prihvatljivo i da ga treba primeniti, tada se preporučuje da se, pri smeštaju koordinata i drugih podataka o tački u računar, šifriranje tačaka obavi po osnovu:

— pripadnosti odgovarajućoj državi,
— pripadnosti odgovarajućem regionu,
— pripadnosti odgovarajućem kontinentu,
— jedinstvena šifra za celu Zemlju.

Ovakvim šifriranjem bi se omogućilo lako određivanje parametara elipsoida koji se najbolje prilagođava geoidu u odgovarajućem lokalitetu, a i za Zemlju kao celinu.

LITERATURA

[1] Burša M.: Osnovi kosmičeskoj geodeziji, Moskva, 1971.
[2] Kaula W.: Theory of Satellite Geodesy, Institute of Geophysics and Planetary Physics University of California at Los Angelos, 1966.
[3] Hoar G.: Satellite surveying, Magnavox, 1982.
[4] Muminagić A.: Ispitivanje realnog geoida u Jugoslaviji, Beograd, 1971.
[5] Moritz H.: Kolokacija metodom najmanjih kvadrata, Geodetski list, 1988, 4—6, 97—102.

SAŽETAK

U radu je prikazana mogućnost jednovremenog određivanja parametara elipsoida (a, b, c, p, q, r, ε, ψ, ω) koji se najbolje prilagođava geoidu, na osnovu koordinata tačaka na geoidu, dobivenih satelitskim opažanjima u koordinatnom sistemu kod koga se z-osa poklapa sa polarnom osom a x a y-ose su u ravni ekvatora. Smatra se da je jednačina elipsoida uslovna jednačina koju neće da zadovolje koordinate tačke zbog nepoklapanja elipsoida sa geoidom kao i zbog grešaka merenja. Uslovne jednačine biće zadovoljene nakon uvođenja popravaka koordinata koje se određuju izravnanjem. Uslovnih jednačina ima koliko i tačaka sa određenim koordinatama. Parametri elipsoida se određuju uz uslov da suma kvadrata popravaka koordinata bude minimalna.

ABSTRACT

The paper present a method of simultaneous determinations of ellipsoid parameters (a, b, c, p, q, ε, ψ, ω), so that the ellipsoid gives the best approximation of the geoid. It is assumed that the coordinates of points on the geoid, obtained by satellite observations in a coordinate system where the z-axis coincides with the polar axis while the x and the y-axis lies on the equatorial plane are known. The ellipsoid equation is considered as a conditional equation which is not satisfied by coordinates of a point because the ellipsoid does not coincide with the geoid and also due to the measurement errors. Conditional equations will be satisfied after including corrections of coordinates, which are determined by the least-squares adjustment. The number of conditional equations is equal to the number of points with known coordinates. The ellipsoid parameters are determined on condition that the sum of the squared corrections is minimal.

Primljeno: 1989-06-05