UDK 528.335.2:519.281
Pregledni rad

POUZDANOST POLIGONOMETRIJSKIH MREŽA

Gligorije PEROVIĆ, Slobodan AŠANIN — Beograd*

1. UVOD

U geodeziji se poligonometrijske mreže često koriste. Za njih je, međutim, poznato da nemaju veliku otpornost na grube greške, stoga je od interesa istražiti njihovu pouzdanost. U tom svetlu istraživanja su vršena na modelu jedne poligonometrijske mreže od 57 tačaka.

2. FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL ZA MREŽU

Funkcije veze, koje povezuju vektor opažanih veličina sa vektorom nepoznatih koordinata, pod pretpostavkom linearizacije, dovode do linearnog funkcionalnog modela

$$v = Ax + f, \quad \text{sa} \quad f = l_0 - l \tag{1}$$

gde je: v — (n, 1) vektor pravih (istinitih) vrednosti popravaka merenja; A — (n, u) matrica jednačina popravaka; x — (u, 1) vektor pravih (istinitih) vrednosti nepoznatih koordinata; l — (n, 1) vektor rezultata merenja, a l_0 — njegova približna vrednost.

Stohastički model glasi:

$$M(v) = 0, \quad \text{sa} \quad K_l = K_v = \sigma^2 P^{-1}, \tag{2}$$

pri čemu je M (·) — znak matematičkog očekivanja; P — (n, n) dijagonalna matrica težina rezultata opažanja; a σ^2 — disperzioni faktor.

Rešenje sistema jednačina (1) po metodi najmanjih kvadrata dovodi do ocena koordinata

$$\hat{x} = -Q A^T P f, \quad \text{sa} \quad Q = Q_{\hat{x}}, \tag{3}$$

* Prof. dr Gligorije Perović, doc. dr Slobodan Ašanin, Građevinski fakultet, Institut za geodeziju, 11000 Beograd, Bulevar revolucije 73/I.

gde je Q — (u, u) kofaktorska matrica ocena koordinata, pri čemu je odgovarajuća kovarijaciona matrica

$$K_{\hat{x}} = \sigma^2 Q. \tag{4}$$

Na kraju za ocene popravaka dobija se

$$\hat{v} = A\hat{x} + f = Q_{\hat{v}} P f, \tag{5}$$

sa

$$K_{\hat{v}} = \sigma^2 Q_{\hat{v}}, \quad i \quad Q_{\hat{v}} = P^{-1} - A Q A^T. \tag{6}$$

Pod pretpostavkom normalnosti rasporeda vektora opažanja, i s obzirom na (1) i (2), biće

$$\hat{v} \sim N(0, K_{\hat{v}}). \tag{7}$$

3. POUZDANOST MREŽA

Stohastički i funkcionalni model mreže mogu biti narušeni na razne načine. Jedan od njih je preko grubih grešaka u opažanjima, što je od posebnog interesa jer takve greške mogu dovesti do pogrešnih zaključaka po rezultatima izravanja.

Neka samo i-to opažanje sadrži grubu grešku G_i. Ova greška će u vektoru ocena popravaka proizvesti vektor grešaka $G_{\hat{v}}$, dok će u oceni i-te popravke dovesti do greške

$$G_{\hat{v}i} = R_{ii} G_i, \quad sa \quad R_{ii} = Q_{\hat{v}i} P_i. \tag{8}$$

Dijagonalni element R_{ii} matrice $Q_{\hat{v}i}P_i$ naziva se koeficijentom ostatka, jer pokazuje uticaj opažanja l_i, odnosno njegove greške, na ostatak $\hat{v}_i$. Ostaci R_{ii} zadovoljavaju relaciju

$$\Sigma R_{ii} = \mathrm{trag}(Q_{\hat{v}} P) = n - r, \tag{9}$$

gde je r — rang matrice A.

Koeficijent ostatka je jedna od geometrijskih karakteristika mreže kojom se izražava procenat greške opažanja koji ostaje u ostatku $\hat{v}_i$, i u jednoj pouzdanoj mreži

$$R_{ii} \to 1. \tag{10}$$

O uticaju grešaka opažanja l_i na ostatke $\hat{v}_i$ može se orjentaciono suditi na osnovi prosečnog koeficijenta ostatka

$$\overline{R} = \frac{n - r}{n} \tag{11}$$

što, prema (10), dovodi do toga da količnik $\frac{n-r}{n}$ treba da bude što bliži jedinici. O jačini uticaja grešaka pojedinog opažanja na ocene popravaka sudi se na osnovi pojedinih R_{ii}, tako je pri:

$0 < R_{ii} < 0{,}01$ — bez uticaja,

$0{,}01 < R_{ii} < 0{,}1$ — slab uticaj,

$0{,}1 < R_{ii} < 0{,}3$ — prihvatljiv uticaj, i za

$0{,}3 < R_{ii} < 1$ — dobar uticaj.

Kao optimalna vrednost za R_{ii} usvaja se 0,4.

Izraz (10) predstavlja jedan od lokalnih kriterijuma unutrašnje pouzdanosti geodetske mreže.

Uloga koeficijenta R_{ii} je važna i u testovima značajnosti zasnovanim na normiranim popravkama.

Neka je samo i-to opažanje opterećeno grubom greškom G_i. U ovom slučaju moguće su dve hipoteze:

$$\text{nulta hipoteza} \quad H_0 : M(l_i) = L_i, \text{ i}$$
$$\text{alternativna hipoteza} \quad H_A : M(l_i) = L_i + G_i, \tag{12}$$

gde je L_i — tačna vrednost i-te merene veličine.

Za proveru nulte hipoteze koristi se test statistika

$$w_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}, \tag{13}$$

gde je $\sigma_{\hat{v}_i}$ — standardna greška ostatka $\hat{v}_i$. Ako je H_0 tačno, onda je

$$w_i | H_0 \sim N(0, 1), \text{ i} \tag{14}$$

$$w_i | H_A \sim N(\lambda_i, 1) \text{ — u drugom slučaju} \tag{15}$$

sa parametrom necentralnosti

$$\lambda_i = \frac{G_i}{\sigma_0} P_i \sqrt{Q_{\hat{v}_i}}. \tag{16}$$

U standardnoj proceduri testiranja, ako je

$$|w_i| < t_{1-\alpha/2}$$

gde je $t_{1-\alpha/2}$ — kvantil standardizovanog normalnog rasporeda za nivo značajnosti $\alpha/2$, onda se H_0 prihvata; u protivnom odbacuje se. Pri tom se mogu učiniti dve vrste grešaka: greška prve vrste, koja nastaje pogrešnim prihvatanjem alternative H_A i čija je verovatnoća α; i greška druge vrste koja nastaje pogrešnim prihvatanjem nulte hipoteze i verovatnoća joj je β. Postoji i događaj prihvatanja alternative H_A kada je ona istinita. Verovatnoća takvog događaja, u oznaci $1-\beta$, naziva se moć testa za testiranje hipoteze H_0.

Moć testa igra bitnu ulogu pri proračunu granične greške, koja se opisanom procedurom testiranja može otkriti. Ta granična vrednost greške može se sračunati po formuli

$$|G_i'| = \lambda_0 \frac{\sigma}{(e_i^T PQ_{\hat{v}} Pe_i)^{1/2}}, \tag{17}$$

gde je λ_0 — gornja granica parametra necentralnosti za usvojeni nivo značajnosti i usvojenu moć testa, a

$$e_i^T = [0 \quad 0 \ldots \quad 1 \quad \ldots \quad 0]$$

— vektor vrsta sa jedinicom na i-tom mestu.

Prvi zahtev pouzdanosti geodetskih mreža odnosi se na otkrivanje što manje grube greške u opažanju l_i, a drugi — na minimalan uticaj neotkrivene greške na mrežu, odnosno na ocene koordinata i njihovih funkcija. Prvi zahtev se rešava uz pomoć (17) što, na primer, dovodi do jednog *lokalnog kriterijuma* unutrašnje pouzdanosti (Pelzer, 1977)

$$\tau_i^2 - 1 \rightarrow \min, \text{ sa } \tau_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 - \hat{\sigma}_i^2}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

ili, do jednog *globalnog kriterijuma* pouzadnosti (Pelzer, 1977)

$$T = \frac{1}{n} \Sigma (\tau_i^2 - 1) \rightarrow \min. \tag{19}$$

Kada bi merenja bila bez grubih grešaka, tada bi $\hat{x}$ bila nepomerena ocena od x. Isto važi i za linearne funkcije $F\hat{x}$.

Ako je vektor merenja opterećen sa vektorom grubih grešaka G tada će očekivana vrednost greške ocene koordinata biti

$$G_{\hat{x}} = - Q A^T P G, \text{ a funkcije } F\hat{x}: G_{F\hat{x}} = - F Q A^T P G. \tag{20}$$

Ispitivanje uticaja grubih grešaka opažanja na ocene koordinata i na njihove funkcije, primjenjujući pri tom standardnu proceduru testiranja, dovodi do formula za proračun graničnih grešaka (Baarda, 1977)

$$G_{\hat{x}_i}' = \sigma_{x_i} \sqrt{\lambda_0} \text{ i } G_{F\hat{x}}' = \sigma_F \sqrt{\lambda_0}, \tag{21}$$

gde je λ_0 — parametar koji zavisi od izbora grešaka prve i druge vrste pri odgovarajućem testu, u kom slučaju se govori o *spoljašnjoj pouzdanosti* mreže.

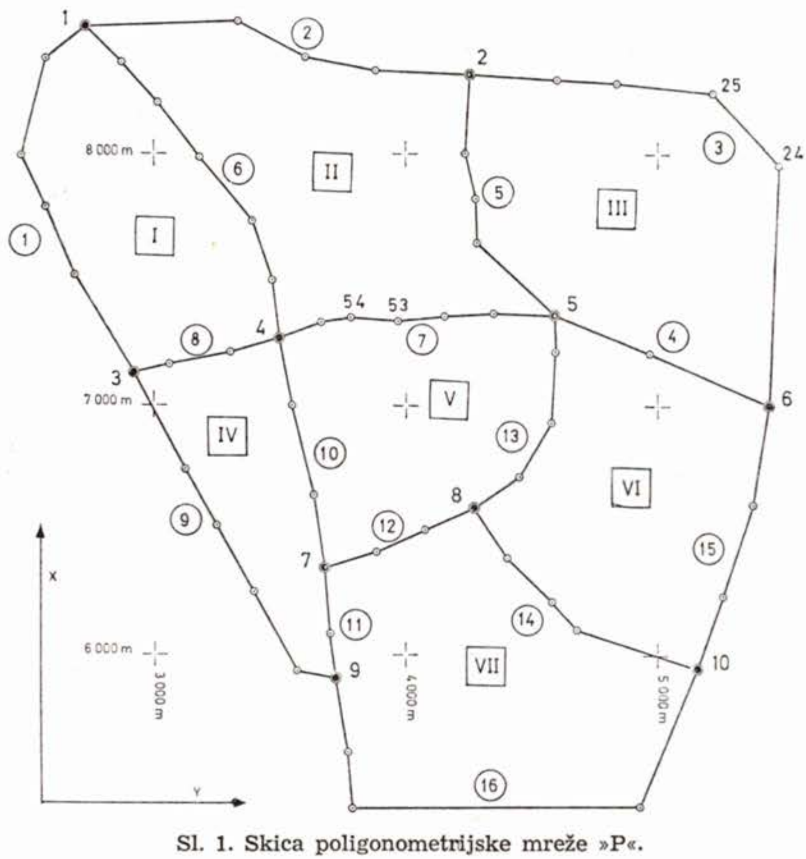
Za spoljašnju pouzdanost, također, postoje kriterijumi, kao na primer (Pelzer, 1977)

$$\lambda_i = \frac{\lambda_0}{h} \cdot \frac{e_i^T PAQ\, F^T Q_F^{-1} FQA^T Pe_i}{e_i^T P\, Q_{\hat{v}} P\, e_i} \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{22}$$

pri čemu je, u opštem slučaju, h — broj funkcija, dok je u konkretnom slučaju h = 1. Tako primenom (17) s (18) i (19) i (21) sa (22) dolazi se do *optimalne pouzdanosti* mreže.

4. REZULTATI ISPITIVANJA POUZDANOSTI NA MODELSKOJ MREŽI

U gradu »P« projektovana je poligonometrijska mreža — Sl. 1, uz napomenu da je i realizovana sa neznatnim izmenama koje je zahtevao investitor.



Sl. 1. Skica poligonometrijske mreže »P«.

Analizirana je pouzdanost mreže uz pretpostavke:

$$\sigma_{pravca} = 3{,}5'' \quad \text{i} \quad \sigma_{dužine} = 5 \text{ mm} + 5 \text{ mm/km}.$$

Sumarni rezultati analize dati su u tabelama 1, 2 i 3.

1. Iz tabele 1. na osnovu koeficijenta ostatka R_{ii}, zaključuje se o slaboj pouzdanosti mreže, jer taj koeficijent na ispitivanim mjestima ima vrednosti: 0,05 i 0,07 — za dužine, a 0,08 i 0,13 — za uglove. Prosečna vrednost koeficijenta R iznosi $\bar{R} = (n-r)/n = 25/189 = 0{,}13$ — dakle jedva prihvatljiva pouzdanost.

2. Tabele 2 i 3. nam govore o graničnim greškama koje je moguće otkriti u opažanjima primenom standardne procedure testiranja. Tako se pri primeni kriterijuma značajnosti nezatvaranja poligona dobija da je moguće otkriti grešku opažanja u vrednosti od jedanestostruke do petnaestostruke standardne greške pravca, dok je taj raspon, na primjer, za vlak 3 u poligonu III od 6 do 10 — dakle nešto manji.

Tabela 1. Neke vrednosti koeficijenta ostatka R_{ii} u poligonometrijskoj mreži grada »P«

Linija ili pravac	KOEFICIJENT OSTATKA R_{ii}	
	za dužine	za pravce
24 — 25	0,05	0,13
53 — 54	0,07	0,08

Tabela 2. Granična greška pravca koju je moguće otkriti u poligonometrijskoj mreži »P« primenom kriterijuma značajnosti nezatvaranja poligona.

POLIGON	Broj uglova u poligonu	moć kriterijuma 0,90	
		nivo značajnosti	
		0,05	0,01
III	11	38"	45"
IV	13	41	49
VI	13	41	49
VII	13	41	49
I	14	43	51
V	16	46	55
II	20	51	61

Tabela 3. Granične vrednosti grubih grešaka, rezultata merenja uglova i dužina, koje se mogu otkriti primenom kriterijuma značajnosti, pri 5%-nom nivou značajnosti i 90%-noj moći kriterijuma, u vlacima 3, 7 i 11.

Broj vlaka	Tačke vlaka	Nivo značajnosti 0,05 moć kriterijuma 0,90	
		Uglovi	Dužine
3	2 27 26 25 24 6	35" 35, 21" 21, 23 23, 30 30, 21 21	11 cm 11 11 10 12
7	4 55 54 53 52 51 5	22 22, 14 14, 15 15, 16 16, 18 18, 49 49	8 7 7 7 7 7
11	7 18 9	21 21, 16" 16"	7 7 cm

5. ZAKLJUČCI

Koristeći se Bardinim (Baarda, 1968) dvama fundamentalnim kriterijumima može se ispitati i optimizirati pouzdanost geodetske mreže. Za ispitivanje pouzdanosti pojedinog opažanja koristiti lokalne kriterijume, a pri upoređenju pouzdanosti različitih varijanti mreže može se koristiti, na primjer, globalni kriterijum T.

Primena navedenih kriterijuma omogućava:

1) Potpuno otkrivanje i eliminisanje grubih grešaka u opažanjima, i

2) Dovođenje na minimum uticaja na mrežu neotkrivenih grešaka opažanja.

LITERATURA

Augath, W., 1977. Über den Aufbau Geodätischer Lagenetze nach Zuverlässigkeitskriterien. The Int. Symp. on Optimization of Design and Computation of Control Networks. Sopron, 4—10 July, 1977.

Baarda W., 1968. A testing procedure for use in Geodetic Networks. NGC, No 5, 1968.

Baarda, W., 1977. Measures for the accuracy of geodetic networks. The Int. Symp. on Optim.... Sopron, 4—10 July, 1977.*

Mierlo, J., 1982. Difficulties of Defining of Geodetic Networks. Survey Control Networks, Meeting, of Study Group 5B. Aalborg 7—9 June, 1982.

Mürle, M. und Bill, R. Zuverlässigkeits — und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze, AVN, 2/1984.

Ninkov, T., 1982. Matematička optimizacija projektovanja geodetskih mreža. Doktrska disertacija. Građevinski fakultet, Beograd, 1982.

Pelzer, H., 1977. Criteria for the Reliability of Geodetic Networks. The Int. Symp. on Optim... Sopron, 4—10 July, 1977.*

Pelzer, H., 1979. Beurteilung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit geodätischer Netze. Kontaktstudium, Februar 1979, Hanover.

Pelzer, H., 1980. Some Criteria for the Accuracy and the Reliability of Networks. DGK, Reihe B, 252/80.

Perović, G. i Ašanin, S., 1987. Definisanje razmere i njen uticaj na preciznost i pouzdanost mreža, Savetovanje: Osnovni geodetski radovi i oprema za njihovo izvođenje — Zbornik radova. Struga, 12—13 Jun. 1987.

SAŽETAK

Za geodetske mreže je, pored preciznosti, od ne manje važnosti i pouzdanost. Pouzdanost mreže znači njenu otpornost na grube greške u opažanjima. U radu je razmatrana pouzdanost jedne tipične poligonometrijske mreže.

ABSTRACT

Reliability is for geodetic networks not less important than precision. Network reliability means its resistance to gross errors in observations. The paper treats reliability of a typical poligonometric network.

Primljeno: 1988-06-04

* in: Halmos F. and Somogyi J., editors, 1979. Optimisation of design and computation of control networks, Budapest.