

IZJEDNAČENJE SLOBODNE TRILATERACIJSKE MREŽE

Željko HEĆIMOVIĆ, Miodrag ROIĆ, Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

U [4] je prikazano strogo izjednačenje slobodne trilateracijske mreže po neovisnim uvjetnim mjerenjima, postupkom TARCZY-HORNOCHA. Formiranjem uvjeta, uvođenjem popravaka mjerenih duljina i razvojem u Taylorov red, dobivaju se linearne uvjetne jednadžbe

$$A^t v_1 + \omega = 0, \quad (1)$$

gdje je:

A — matrica koeficijentata uvjetnih jednadžbi,

 v_1 — vektor popravaka mjerenih duljina, ω — vektor nesuglasica.

Odgovarajuće normalne jednadžbe tada su

$$A^t Q_{11} A k + \omega = 0, \quad (2)$$

gdje je: Q_{11} — matrica kofaktora mjerenih duljina (jednaka je jediničnoj matrici).

Rješenje normalnih jednadžbi je

$$k = - (A^t A)^{-1} \omega. \quad (3)$$

i popravke mjerenih duljina su

$$v_1 = A k. \quad (4)$$

Isti zadatak može se, međutim, riješiti i primjenom izjednačenja koreliranih mjerenja. Naime, kutovi koji formiraju uvjete (vidi [4] izraz (2)), međusobno su algebarski korelirane (ovisne) veličine, jer su funkcije istih mjerenih duljina.

 \bar{f} — vektor izjednačenih vrijednosti kutova,

f — vektor računatih vrijednosti kutova,

 v_f — vektor popravaka kutova,

* Željko Hećimović dipl. inž., Miodrag Roić dipl. inž. i Nevio Rožić dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

$$\bar{f} = f + v_f \quad (5)$$

U ovom postupku izjednačenja, uvjetne jednadžbe bit će

$$B^t v_f + \omega = 0, \quad (6)$$

gdje je:

- B — matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi,
- v_f — vektor popravaka kutova,
- ω — vektor nesuglasica.

Pripadna matrica kofaktora koreliranih kutova Q_{ff} određuje se primjenom zakona o prirastu kofaktora na funkcije koje povezuju kutove i mjerene duljine. Ove funkcije dane su u [4] izrazima (5) i (6).

Postavljanjem totalnog diferencijala funkcija, izraz (9) u [4], dobiva se

$$df = F dl, \quad (7)$$

gdje je:

- df — vektor diferencijalnih kutova,
- F — matrica parcijalnih derivacija funkcija po mjerenim duljinama,
- dl — vektor diferencijala mjerenih duljina.

Za pojedini diferencijal kuta pripadni elementi matrice F su koeficijenti a_i , b_i , c_i izraza (10) u [4].

Kako je pretpostavljeno da su sve mjerene duljine određene istom točnošću ($Q_{11} = I$) bit će matrica kofaktora koreliranih kutova

$$Q_{ff} = F Q_{11} F^t = F F^t. \quad (8)$$

Prema tome, normalne jednadžbe su

$$B^t Q_{ff} B k + \omega = 0, \quad (9)$$

Rješenje normalnih jednadžbi je

$$k = -(B^t Q_{ff} B)^{-1} \omega, \quad (10)$$

i popravke koreliranih kutova su

$$v_f = Q_{ff} B k. \quad (11)$$

Međutim, i u ovom postupku izjednačenja treba odrediti popravke mjerenih duljina a to se provodi na slijedeći način.

Usporedbom uvjetnih jednadžbi danih izrazima (1) i (6) slijedi jednakost

$$A^t = B^t F, \quad (12)$$

pa uvjetne jednadžbe dane izrazom (1), poprimaju oblik

$$B^t F v_1 + \omega = 0. \quad (13)$$

Dakle, pomoću izraza (13) mogu se odrediti popravke mjerenih duljina, tj.

$$v_1 = F^t B k. \quad (14)$$

Primjer: Izjednačenje i ocjena točnosti slobodne trilateracijske mreže po uvjetnim koreliranim mjerenjima (Izjednačava se mreža zadana u [4] otkud se preuzima računanje centralnih kutova i određivanje nesuglasica.

Matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi

$$B^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Formiranje matrice F

$$F \begin{bmatrix} 627 & 0 & 0 & -483 & -543 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 794 & 0 & 0 & -730 & -631 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1054 & -975 & 0 & -937 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 182 & 0 & 0 & 36 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 159 & 0 & -45 & -6 \\ 0 & 0 & -182 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 89 \end{bmatrix}$$

Računanje matrice kofaktora koreliranih kutova

$$Q_{rr} = F F^t \begin{bmatrix} 921267 & 396390 & 470925 & -87906 & 0 & 0 \\ 396390 & 1561497 & 591247 & 0 & -100329 & 0 \\ 470925 & 591247 & 2939510 & -177450 & -148983 & -191828 \\ -87906 & 0 & -177450 & 44420 & 4500 & 1260 \\ 0 & -100329 & -148983 & 4500 & 27342 & -534 \\ 0 & 0 & -191828 & 1260 & -534 & 42270 \end{bmatrix}$$

Normalne jednadžbe

$$B^t Q_{rr} B \begin{bmatrix} 8339398 & -706496 \\ -706496 & 124484 \end{bmatrix} \cdot k + \omega = 0$$

Rješenje normalnih jednažbi

$$k = - (B^t Q_{ff} B)^{-1} \omega = \begin{bmatrix} -0.0000301 \\ -0.0004236 \end{bmatrix}$$

Računanje popravaka i izjednačenih vrijednosti kutova

f	v_f	\bar{f}
$\begin{bmatrix} 110^\circ 18' 09''.99 \\ 119^\circ 17' 52''.37 \\ 130^\circ 23' 09''.72 \\ 21^\circ 53' 28''.97 \\ 18^\circ 23' 08''.81 \\ 319^\circ 43' 53''.66 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -16''.67 \\ -34''.34 \\ 98''.93 \\ -13''.26 \\ -5''.75 \\ -12''.43 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 110^\circ 17' 53''.32 \\ 119^\circ 17' 18''.03 \\ 130^\circ 24' 48''.65 \\ 21^\circ 53' 15''.71 \\ 18^\circ 23' 03''.06 \\ 319^\circ 43' 41''.23 \end{bmatrix}$

Računanje popravaka i izjednačenih vrijednosti duljina:

l	v_l	\bar{l}
$\begin{bmatrix} 965.63 \\ 943.39 \\ 855.84 \\ 514.77 \\ 657.66 \\ 427.20 \\ 1154.36 \\ 1353.51 \\ 1300.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.019 \\ -0.024 \\ 0.045 \\ -0.033 \\ 0.038 \\ -0.020 \\ -0.030 \\ 0.061 \\ -0.035 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 965.611 \\ 943.366 \\ 855.885 \\ 514.737 \\ 657.698 \\ 427.180 \\ 1154.330 \\ 1353.571 \\ 1299.975 \end{bmatrix}$

Kontrole izjednačenja:

$$v^t v = 0.0119$$

$$-\omega^t k = 0.0119$$

Kontrole uvjeta na osnovi izjednačenih kutova:

α_1	110	17	53.29	β_3	21	53	15.70
α_2	119	17	18.04	β_4	18	23	03.09
α_3	130	24	48.66	β_5	319	43	41.24
Σ	360	59	59.99	Σ	360	00	00.03
	360	00	00.00		360	00	00.00
ω_1			-0.01	ω_2			0.03

Ocjena točnosti:

$$\text{Referentna srednja pogreška: } m_0 = \pm \sqrt{\frac{v^t v}{r}} = \pm 0.077 \text{ m.}$$

Usporedbom izloženog postupka izjednačenja s onim danim u [4] može se zaključiti da oba navedena postupka očigledno daju iste rezultate, čime je potvrđena njihova ispravnost. Naravno, prednost treba dati jednostavnijem postupku, a to je izjednačenje neovisnih mjerenja. Ovaj postupak je i teorijski ispravniji jer se popravljaju mjerene duljine (neposredna merenja). Izjednačenje koreliranih kutova zahtijeva upotrebu nešto složenijeg matematičkog aparata, pa se za sve praktične primjene preporučuje upotreba postupka izjednačenja po neovisnim mjerenjima.

LITERATURA

- [1] Feil, L.: Teorija pogreška s računom izjednačenja II, rukopis, Zagreb 1988.
- [2] Linkwitz, K.: Einige Bemerkungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz und über die Einführung von Ersatzbeobachtungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1969, 2, 57-71.
- [3] Linkwitz, K.: Über die Substitution von Variablen (»Ersatzbeobachtungen«) bei der Ausgleichung nichtlinearer bedingter Beobachtungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1972, 2, 57-68.
- [4] Roić, M, Rožić, N.: Prilog izjednačenju slobodne trilateracijske mreže, Geodetski list, 1989, 1-3.

SAŽETAK

U ovom radu je prikazano izjednačenje slobodne trilateracijske mreže, po koreliranim mjerenjima (kutovima).

ABSTRACT

In this paper is presented adjustment of free trilateration network in respect to correlated angles.

Primljeno: 1989-03-01