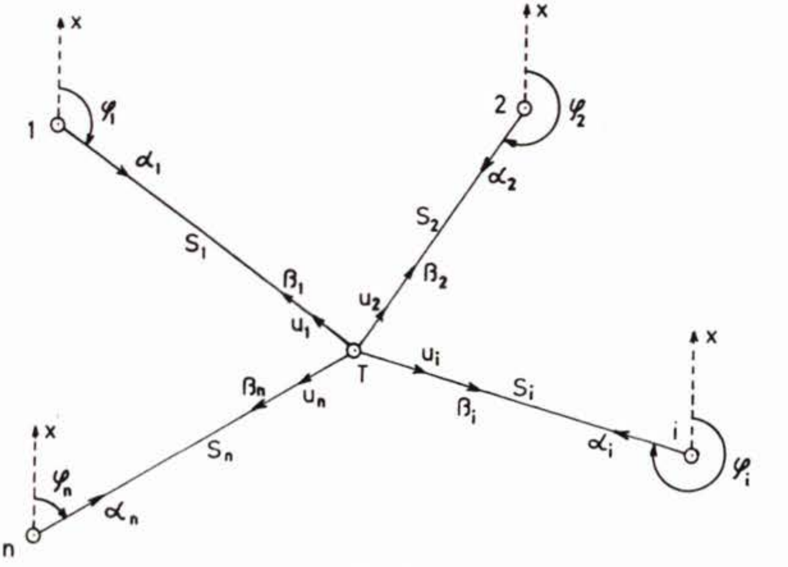
UDK 528.33:528.14
Pregledni rad

ODREĐIVANJE PROSTORNIH KOORDINATA TRIGONOMETRIJSKE TAČKE ZAJEDNIČKIM IZRAVNANJEM HORIZONTALNIH I VERTIKALNIH PRAVACA I DUŽINA

Nihad KAPETANOVIĆ — Sarajevo*

1. UVOD

Neka želimo odrediti koordinate x, y i nadmorsku visinu z tačke T od okolnih datih tačaka 1, 2, ... n, ako su dati orijentisani pravci φ_1, φ_2 ... φ_n, te mjerni unutrašnji pravci u_1, u_2, ... u_n, dužine s_1, s_2, ... s_n, vertikalni uglovi α_1, α_2, ... α_n sa datih na traženu tačku, te vertikalni uglovi β_1, β_2, ... β_n sa tražene na date tačke (sl. 1). Teoretski je najispravnije izvršiti izravnanje svih mjerenih veličina odjednom, pa su u radu izvedene formule za takvo zajedničko izravnanje.



Sl. 1.

* Prof. dr Nihad Kapetanović, Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24

2. JEDNAČINE GREŠAKA

Prije izravnanja, iz neophodnog broja mjerenja, treba sračunati približne koordinate x^0, y^0, z^0 tražene tačke *T*.

U cilju izravnanja, za svako izvršeno mjerenje treba postaviti jednu jednačinu, tako da jednačine grešaka glase:

$$
\begin{aligned}
v_i^{\varphi} &= a_i^{\varphi}\,\delta x + b_i^{\varphi}\,\delta y && + f_i^{\varphi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_{\varphi})\\
v_i^{u} &= a_i^{u}\,\delta x + b_i^{u}\,\delta y && + f_i^{u} \qquad (i = 1, 2, \ldots n_{u})\\
v_i^{s} &= a_i^{s}\,\delta x + b_i^{s}\,\delta y && + f_i^{s} \qquad (i = 1, 2, \ldots n_{s})\\
v_i^{\alpha} &= a_i^{\alpha}\,\delta x + b_i^{\alpha}\,\delta y + c_i^{\alpha}\,\delta z && + f_i^{\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots n_{\alpha})\\
v_i^{\beta} &= a_i^{\beta}\,\delta x + b_i^{\beta}\,\delta y + c_i^{\beta}\,\delta z && + f_i^{\beta} \qquad (i = 1, 2, \ldots n_{\beta})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

U jedn. (1) n_{φ} znači broj mjerenih vanjskih (orijentisanih) pravaca, n_u broj mjerenih unutrašnjih pravaca, n_s broj mjerenih dužina, n_{α} broj mjerenih vertikalnih uglova sa datih na traženu tačku a n_{β} broj mjerenih vertikalnih uglova sa tražene na date tačke. Naravno, da bi došlo do izravnanja nije potrebno izvršiti sva naznačena mjerenja, dovoljno je da ukupan broj izvršenih mjerenja *n* bude veći od broja traženih veličina, tj. da bude $n > 3$ ako u izravnanje ne ulaze unutrašnji pravci ($n_u = 0$), odnosno $n > 4$ ako u izravnanje ulaze i unutrašnji pravci ($_u > 0$). Razumljivo je da u svakom slučaju mora biti izvršen barem neophodan broj mjerenja za određivanje položaja (ukupan broj horizontalnih pravaca i dužina mora biti $n \geq 2$ za $n_u = 0$, odnosno $n \geq 3$ za $n > 0$) i visine (mora biti izmjeren bar jedan vertikalni ugao) tražene tačke *T*.

Popravke v_i^{φ}, v_i^{u} i v_i^{s} i slobodni članovi f_i^{φ}, f_i^{u} i f_i^{s} u jednačinama grešaka koji se odnose na vanjske i unutrašnje pravce i dužine su kao što je poznato:

$$
\begin{aligned}
&a_i^{\varphi} = -\frac{\rho'' \sin \nu_i^0}{s_i^0}, \qquad b_i^{\varphi} = \frac{\rho'' \cos \nu_i^0}{s_i^0}, \qquad f_i^{\varphi} = \nu_i^0 - \varphi_i\\
&a_i^{u} = \operatorname{red} a_i^{\varphi} = a_i^{\varphi} - \frac{[a^{\varphi}]}{n_{\varphi}}, \qquad b_i^{u} = \operatorname{red} b_i^{\varphi} = b_i^{\varphi} - \frac{[b^{\varphi}]}{n_{\varphi}}, \qquad f_i^{u} = \operatorname{red} f_i'\\
&a_i^{s} = \cos \nu_i^0, \qquad b_i^{s} = \sin \nu_i^0, \qquad f_i^{s} = s_i^0 - s_i
\end{aligned}
\tag{2}
$$

pri čemu ν_i^0 predstavlja približnu vrijednost smjernjaka sa *i*-te date na traženu tačku, s_i^0 približnu vrijednost dužine između *i*-te date i tražene tačke, dok je

$$
\operatorname{red} f_i' = f_i' - \frac{[f']}{n_{\varphi}}, \qquad f_i' = \nu_i^0 \pm 180^\circ + \psi^0 - u_i,
$$

gdje je ψ^0 približna vrijednost orijentacije sračunata pomoću jednog pravca, npr. $\psi^0 = u_1 - (\nu_1^0 \pm 180^\circ)$.

Da bismo dobili izraze za koeficijente a_i^α, b_i^α, c_i^α u jednačinama grešaka (1) koje se odnose na mjerene vertikalne uglove sa datih na traženu tačku, te odgovarajuće slobodne članove f^α poslužimo se slijedećim razmatranjem:

Izravnata visina z tačke T može se, kao što je poznato, izraziti formulom

$$z = z_i + \Delta z_i'^\alpha + (1 - k) \frac{s_i^2}{2R} + \Delta z_i^\alpha \frac{z_m}{R} + I_i - l_T \tag{3α}$$

gdje je

$$\Delta z_i'^\alpha = s_i' \operatorname{tg} \alpha_i' \tag{4α}$$

a

$$s_i' = s_i + v_i^s; \qquad \alpha_i' = \alpha_i + v_i^\alpha \tag{5α}$$

izravnate vrijednosti dužine i vertikalnog ugla, pri čemu su upotrebljene oznake

k koeficijent refrakcije,
R radius Zemlje (6 370 km),
I_i visina instrumenta na tački i,
l_T visina signala na tački T,

$$z_m = \frac{z_i + z_0}{2}.$$

U korekcionim članovima jedn. (3α) umjesto izravnatih uzete su, bez posljedica po tačnost, mjerene vrijednosti s_i dužine, te približne vrijednosti $\Delta z_i^\alpha = s_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$ visinske razlike i približna vrijednost z_m nadmorske visine srednje nivo-plohe između tačaka i i T.

Ako označimo

$$c_i^\alpha = (1 - k) \frac{s_i^2}{2R} + \Delta z_i^\alpha \frac{z_m}{R} + I_i - l_T \tag{6α}$$

glasiće formula (3α)

$$z = z_i + \Delta z_i'^\alpha + c_i^\alpha, \tag{7α}$$

odnosno, ako uvedemo oznaku

$$z_i + c_i^\alpha = z_i^\alpha \tag{8α}$$

biće, prema jedn. (7α) i (8α)

$$\Delta z_i'^\alpha = z - z_i^\alpha \tag{9α}$$

Iz jedn. (4α) i (9α) proizlazi

$$\alpha_i' = \alpha_i + v_i^\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta z_i'^\alpha}{s_i'} = \operatorname{arc\,tg} \frac{z - z_i^\alpha}{s_i'} \tag{10α}$$

i pošto je (prema sl. 1)

$$s_i' = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \tag{11}$$

jedn. (10α) možemo pisati u obliku

$$\alpha_i' = \text{arc tg} \frac{z - z_i^\alpha}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \tag{12α}$$

Ako zanemarimo greške mjerenja visine instrumenta i signala, biće, prema jedn. (6α) i (8α) u jedn. (12α) promjenljive veličine samo koordinate x, y, z tražene tačke *T*.

Jedn. (12α) razvićemo u red zadržavajući samo linearne članove, pa imamo

$$\alpha_i' = \alpha_i + v_i^\alpha = \alpha_i^0 + a_i^\alpha \, \delta x + b_i^\alpha \, \delta y + c_i^\alpha \, \delta z \tag{13α}$$

ili

$$v_i^\alpha = a_i^\alpha \, \delta x + b_i^\alpha \, \delta y + c_i^\alpha \, \delta z + f_i^\alpha \tag{14α}$$

gdje je

$$f_i^\alpha = \alpha_i^0 - \alpha_i \tag{15α}$$

slobodni član, a

$$\alpha_i^0 = \text{arc tg} \frac{z^0 - z_i^\alpha}{\sqrt{(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2}} \tag{16α}$$

približna vrijednost vertikalnog ugla α, sračunata pomoću približne vrijednosti z^0 nadmorske visine tražene tačke *T*. U jedn. (16α) koeficijenti a_i^α, b_i^α i c_i^α znače odgovarajuće parcijalne izvode u okolini tačke *T*, tj.

$$a_i^\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_i'}{\partial x}\right)_0 = - \frac{(z^0 - z_i^\alpha)(x^0 - x_i)}{\{s_i^{o2} + (z^0 - z_i^\alpha)^2\} s_i^o} \rho'' = - \frac{(z^0 - z_i^\alpha) \cos \nu_i^o}{s_i^{o2} + (z^0 - z_i^\alpha)^2} \rho''$$

$$b_i^\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_i'}{\partial y}\right)_0 = - \frac{(z^0 - z_i^\alpha)(y^0 - y_i)}{\{s_i^{o2} + (z^0 - z_i^\alpha)^2\} s_i^o} \rho'' = - \frac{(z^0 - z_i^\alpha) \sin \nu_i^o}{s_i^{o2} + (z^0 - z_i^\alpha)^2} \rho'' \tag{17α}$$

$$c_i^\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_i'}{\partial z}\right)_0 = \frac{s_i^o}{s_i^{o2} + (z^0 - z_i^\alpha)^2} \rho''$$

pri čemu su koeficijenti a_i^α, b_i^α i c_i^α pomnoženi sa ρ'' da bi se popravke vertikalnih uglova izrazile u sekundama.

Da bismo dobili izraze za koeficijente a_i^β, b_i^β i c_i^β u jednačinama grešaka (1) koji se odnose na mjerene vertikalne uglove sa tražene na date tačke, te odgovarajući slobodni član f_i^β poslužimo se poznatom formulom za trigonometrijski nivelman

$$z_i = z + \Delta z_i'^\beta + (1 - k)\frac{s_i^2}{2R} + \Delta z_i^\beta \frac{z_m}{R} + I_T - l_i \tag{3β}$$

gdje su

$$\Delta z_i'^\beta = s_i' \operatorname{tg} \beta_i' \tag{4β}$$

i

$$s_i' = s_i + v_i^s; \qquad \beta_i' = \beta_i + v_i^\beta \tag{5β}$$

izravnate vrijednosti, a

I_T visina instrumenta u tački T

l_i visina signala na tački i,

$\Delta z_i^\beta = s_i \operatorname{tg} \beta$ približna vrijednost visinske razlike.

Ako označimo

$$c_i^\beta = (1 - k)\frac{s_i^2}{2R} + \Delta z_i^\beta \frac{z_m}{R} + I_T - l_i \tag{6β}$$

glasiće formula (3β)

$$z_i = z + \Delta z_i'^\beta + c_i^\beta \tag{7β}$$

i ako označimo

$$z_i - c_i^\beta = z_i^\beta \tag{8β}$$

biće prema jedn. (7β) i (8β)

$$\Delta z_i'^\beta = - z_i^\beta - z \tag{9β}$$

Iz jedn. (4β) i (9β) proizlazi

$$\beta_i' = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_i^\beta - z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \tag{12β}$$

Jedn. (12β) razvićemo u red zadržavajući samo linearne članove, pa imamo:

$$\beta_i' = \beta_i + v_i^\beta = \beta_i^0 + a_i^\beta \delta x + b_i^\beta \delta y + c_i^\beta \delta z \tag{13β}$$

ili

$$v_i^\beta = a_i^\beta\,\delta x + b_i^\beta\,\delta y + c_i^\beta\,\delta z + f_i^\beta \tag{14β}$$

gdje je

$$f_i^\beta = \beta_i^0 - \beta_i \tag{15β}$$

slobodni član, a

$$\beta_i^0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_i^\beta - z^0}{\sqrt{(x_i - x^0)^2 + (y_i - y^0)^2}} \tag{16β}$$

približna vrijednost vertikalnog ugla. Koeficijenti u jednačinama grešaka (14β) su:

$$\begin{aligned}
a_i^\beta &= \left(\frac{\partial \beta_i'}{\partial x}\right)_0 = - \frac{(z_i^\beta - z^0)\cos \nu_i^0}{s_i^{02} + (z^0 - z_i^\beta)^2}\,\rho'' \\
b_i^\beta &= \left(\frac{\partial \beta_i'}{\partial y}\right)_0 = - \frac{(z_i^\beta - z^0)\sin \nu_i^0}{s_i^{02} + (z^0 - z_i^\beta)^2}\,\rho'' \\
c_i^\beta &= \left(\frac{\partial \beta_i'}{\partial z}\right)_0 = - \frac{s_i^0}{s_i^{02} + (z_i - z_0^\beta)^2}\,\rho''
\end{aligned} \tag{17β}$$

Ako su korekcioni članovi c_i^α i c_i^α maleni, tj. ako je $\beta_i \doteq -\alpha_i$ onda je prema jedn. (8α) i (8β) $z_i^\beta \doteq z_i^\alpha$, pa s obzirom na jedn. (17α) i (17β) vrijedi

$$a_i^\beta \doteq - a_i^\alpha; \qquad b_i^\beta \doteq - b_i^\alpha; \qquad c_i^\beta = - c_i^\alpha \tag{18}$$

3. NORMALNE JEDNAČINE

Nakon iznalaženja koeficijenata jednačina grešaka mogu se formirati normalne jednačine

$$\begin{aligned}
[PAA]\,\delta x + [PAB]\,\delta y + [PAC]\,\delta z + [PAF] &= 0 \\
[PAB]\,\delta x + [PBB]\,\delta y + [PBC]\,\delta z + [PBF] &= 0 \\
[PAC]\,\delta x + [PBC]\,\delta y + [PCC]\,\delta z + [PCF] &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

pri čemu su, ako uvažimo da je $c_i^\varphi = c_i^u = c_i^s = 0$,

$$[PAA] = [p^\varphi a^\varphi a^\varphi] + [p^u a^u a^u] + [p^s a^s a^s] + [p^\alpha a^\alpha a^\alpha] + [p^\beta a^\beta a^\beta]$$

$$
\begin{aligned}
[PAB] &= [p^{\varphi}a^{\varphi}b^{\varphi}] + [p^{u}a^{u}b^{u}] + [p^{s}a^{s}b^{s}] + [p^{\alpha}a^{\alpha}b^{\alpha}] + [p^{\beta}a^{\beta}b^{\beta}] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[PCF] &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [p^{\alpha}c^{\alpha}f^{\alpha}] + [p^{\beta}c^{\beta}f^{\beta}]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

dok se odgovarajuće težine računaju po formulama

$$
p_i^{\varphi} = \frac{K}{m^2_{\varphi_i}}; \quad p_i^{u} = \frac{K}{m^2_{u_i}}; \quad p_i^{s} = \frac{K}{m^2_{s_i}}; \quad p_i^{\alpha} = p_i^{\beta} = \frac{K}{m^2_{\alpha_i}} = \frac{K}{m^2_{\beta_i}} \tag{21}
$$

U formulama (21) *K* predstavlja proizvoljnu konstantu, dok su

m_{φ_i} srednja greška i-tog vanjskog (orijentisanog) pravca,
m_{u_i} srednja greška i-tog unutrašnjeg pravca,
m_{s_i} srednja greška i-te mjerene strane,
$m_{\alpha i} = m_{\beta_i}$ srednja greška i-tog vertikalnog ugla.

Orijentisani pravci φ_i računaju se, kao što je poznato, po formuli

$$
\varphi_i = 0_i + \gamma_i \tag{22}
$$

pri čemu O_i predstavlja orijentaciju, a γ_i mjereni pravac. Ako srednju grešku orijentacije na *i*-toj datoj tački označimo sa m_{o_i} a srednju grešku mjerenog pravca sa m_i, biće srednja greška orijentisanog pravca φ_i

$$
m_{\varphi_i} = \sqrt{m^2_{O_i} + m_i^2} \tag{23φ}
$$

pri čemu srednja greška orijentacije zavisi od broja r_i pravaca sa *i*-te na date tačke koji su poslužili za njeno određivanje. Smatramo li da su svi pravci izmjereni sa istom srednjom greškom *m*, tj. $m_i = m$, biće srednja greška i-tog orijentisanog pravca

$$
m_{\varphi_i} = \sqrt{\frac{m^2 r_i}{r_i^2} + m^2} = m\sqrt{\frac{r_i + 1}{r}} \tag{24φ}
$$

dok je srednja greška svakog unutrašnjeg pravca

$$
m_{u_i} = m. \tag{24u}
$$

Smatraćemo da su svi vertikalni uglovi izmjereni sa istom srednjom greškom

$$
m_{\alpha} = m_{\beta}. \tag{24α}
$$

Na osnovu formula (21), (24φ), (24u) i (24α) dobijamo:

— težine (vanjskih) orijentisanih pravaca

$$
p_i^{\varphi} = \frac{K}{m^2 \frac{r_i + 1}{r_i}} = c\,\frac{r_i}{r_i + 1}, \tag{25φ}
$$

— težine unutrašnjih pravaca

$$p^u = \frac{K}{m^2} = c, \tag{25u}$$

— težine vertikalnih uglova

$$p^\alpha = p^\beta = \frac{K}{m_\alpha^2} = c', \tag{25α}$$

dok se težine strana računaju po formuli

$$p_i^s = \frac{K}{m_{s_i}^2} \tag{25s}$$

Ako su, međutim, sve strane približno iste dužine, onda su i srednje greške pojedinih strana podjednake, pa u tom slučaju i sve strane dobivaju iste težine, tj.

$$p_s = \frac{K}{m_s^2} = c^s \tag{26s}$$

Rješenjem normalnih jednačina (19) dobiće se nepoznate δx, δy i δz, a zatim i definitivne koordinate tačke T, tj.

$$x = x^0 + \delta x; \qquad y = y^0 + \delta y; \qquad z = z^0 + \delta z \tag{27}$$

4. OCJENA TAČNOSTI

Srednja greška mjerenja jedinične težine za $n_u > 0$ dobiva se po formuli

$$m_0 = \sqrt{\frac{[PVV]}{n-4}} \tag{28u}$$

a za $n_u = 0$ po formuli

$$m_0 = \sqrt{\frac{[PVV]}{n-3}} \tag{28}$$

pri čemu je

$$[PVV] = [p^\varphi v^\varphi v^\varphi] + [p^u v^u v^u] + [p^s v^s v^s] + [p^\alpha v^\alpha v^\alpha] + [p^\beta v^\beta v^\beta] \tag{29}$$

$$n = n_\varphi + n_u + n_s + n_\alpha + n_\beta$$

Srednje greške koordinata sračunaćemo po poznatim formulama

$$M_x = m_0 \sqrt{Q_{xx}}; \quad M_y = m_0 \sqrt{Q_{yy}}; \quad M_z = m_0 \sqrt{Q_{zz}} \tag{30}$$

pri čemu su koeficijenti Q_{xx}, Q_{yy} i Q_{zz} dijagonalni elementi matrice

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{bmatrix} = N^{-1} \tag{31}$$

inverzne matrici

$$N = \begin{bmatrix} [PAA] & [PAB] & [PAC] \\ [PAB] & [PBB] & [PBC] \\ [PAC] & [PBC] & [PCC] \end{bmatrix} \tag{32}$$

Položajna greška tražene tačke u horizontalnoj ravnini je

$$M_H = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \tag{33}$$

a položajna greška tražene tačke u prostoru je

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{34}$$

LITERATURA

[1] Kapetanović, N.: Položajna greška trigonometrijske tačke, Radovi 7, Građevinski fakultet Sarajevo, 1981.
[2] Mihailović, K.: Geodezija II, I. deo, Građevinska knjiga Beograd, 1974.
[3] Ninkov, T.: Primena trodimenzionalnog izravnanja lokalnih geodetskih mreža u inženjerskoj geodeziji, Geodetski list 1987, 10—12, 309—318.
[4] Pašalić, S.: Račun izravnanja, Građevinski fakultet, Sarajevo, 1984.

SAŽETAK

Kada su, s ciljem određivanja prostornih koordinata trigonometrijske tačke, izmjereni dužine, horizontalni i vertikalni pravci, teoretski je najispravnije izvršiti izravnanje svih mjerenih veličina odjednom. U radu su izvedene odgovarajuće formule za takvo zajedničko izravnanje.

ABSTRACT

When distances, horizontal and vertikal directions are measured, for the purpose of spatial coordinates of trigonometrical point, theoretically the most correct approach is to adjust all observations together. In this work appropriate formulae for such adjustment are derived.

Primljeno: 1988-06-22