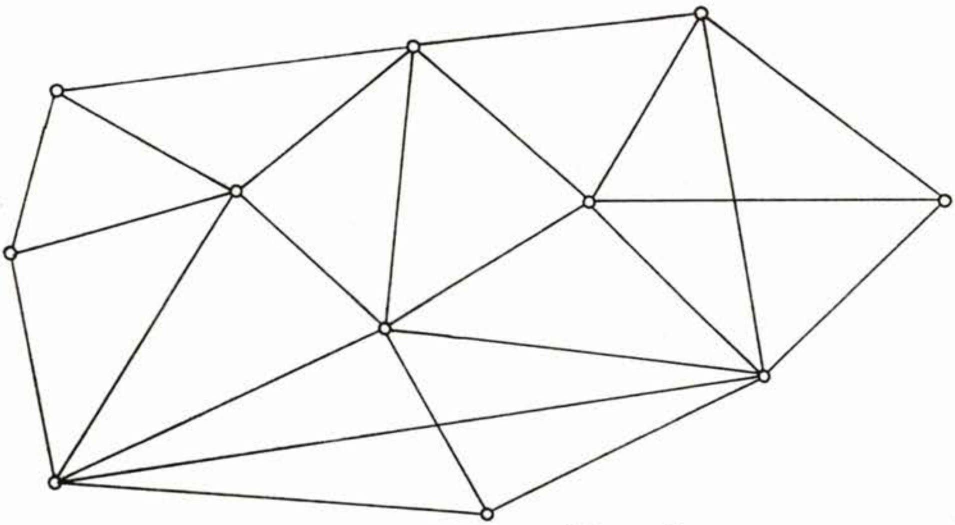
UDK 528.33:528.14
Stručni rad

PRILOG IZJEDNAČENJU SLOBODNE TRILATERACIJSKE MREŽE

Miodrag ROIĆ, Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

Primjena trilateracije, koju uvjetuje razvoj modernih daljinomjera, svakim je danom u geodetskoj praksi, u rješavanju različitih problema, sve značajnija. Obrada podataka mjerenja trilateracijskih mreža, međutim, zahtijeva izbor odgovarajućih postupaka izjednačenja. Moguće je, govoreći o strogom izjednačenju metodom najmanjih kvadrata, provesti izjednačenje po posrednim ili uvjetnim mjerenjima. Odabir je uglavnom, povezan s količinom računskog posla kojeg treba obaviti (brojem normalnih jednadžbi), osim u slučaju izjednačenja slobodne trilateracijske mreže, gdje se izjednačenje, uobičajeno, provodi po uvjetnim mjerenjima. Pri tom mreža ne može biti oblika nesuvislog niza trokuta, već mreža trokuta uklopljenih u međusobno povezane centralne sisteme i geodetske četverokute, sl. 1.

Broj neovisnih uvjeta r (broj prekobrojnih mjerenja), bez obzira na konfiguraciju mreže, može se jednostavno odrediti, jer je jednak broju sinusnih uvjeta u istovjetnoj triangulacionoj mreži, [4], odnosno prema izrazu



Sl. 1. Slobodna trilateracijska mreža

* Miodrag Roić, dipl. inž., Nevio Rožić, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb.

$$r = L - 2P + 3. \tag{1}$$

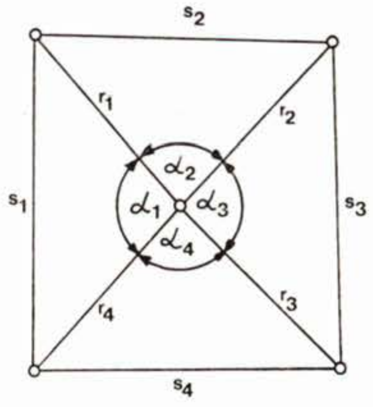
U ovom izrazu L je broj svih mjerenih strana, a P broj točaka u mreži. Drugim riječima broj uvjeta jednak je broju neovisnih centralnih sistema i geodetskih četverokuta mreže.

Najosjetljiviji dio izjednačenja je sastav uvjetnih jednadžbi, odnosno računanje koeficijenata uz popravke u uvjetnim jednadžbama. U literaturi nalazimo nekoliko različitih pristupa (vidi npr. [1], [4] i [5]), međutim malo je poznat i korišten u praksi postupak TARCZY-HORNOCHA [3], iako je zanimljiv, lagan za primjenu i specifičan po načinu rješavanja problema.

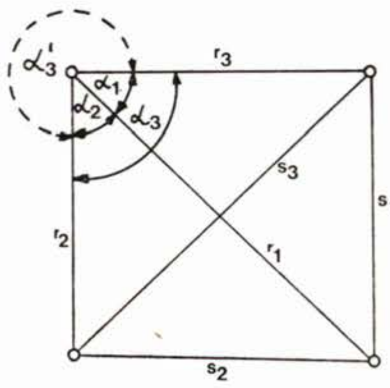
Tarczy-Hornoch polaze od klasične uvjetne jednadžbe

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i - 360^\circ = 0 \tag{2}$$

koja, općenito, vrijedi za trilateracijske mreže prikazane na sl. 2. i sl. 3. Geodetski četverokut može se smatrati centralnim sistemom, ali s izvučenom središnjom točkom, te se uvjet postavlja s nadopunom kuta α_3.



Sl. 2. Centralni sistem



Sl. 3. Geodetski četverokut

Centralni kutovi α_i uvode se kao funkcije mjerenih strana s_i, r_i. Izjednačene vrijednosti tih kutova prikazuju se, nakon uvođenja približnih veličina, izrazom.

$$\overline{\alpha}_i = \alpha_i^\circ + \delta\alpha_i. \tag{3}$$

Uvrstivši ovaj izraz u izraz (2), dobiva se

$$\sum_{1}^{n} \delta\alpha_i + (\sum_{1}^{n} \alpha_i^\circ + 360^\circ) = 0 \tag{4}$$

Umjesto $\delta\alpha_i$ u izraz (4) treba uvesti popravke pripadnih mjerenih strana. Zbog toga se postavlja totalni diferencijal funkcije koja povezuje kutove α_i s mjerenjima, tj.

$$\cos\frac{\alpha_i}{2} = \frac{o_i\,(o_i - s_i)}{r_i\,r_{i-1}}, \tag{5}$$

gdje je

$$o_i = \frac{s_i + r_i + r_{i-1}}{2} \tag{6}$$

Ovakav je pristup, formiranja uvjetnih jednadžbi, ispravan jedino uz uvjet da su $\delta\alpha_i$ zaista male veličine. Nasuprot izloženom, u klasičnom pristupu, linearizacija se obavlja razvojem izraza (2) u Taylorov red.

Određivanje totalnog diferencijala $\delta\alpha_i$, iz izraza (5), provodi se nakon logaritmiranja i prijelaza na prirodne vrijednosti logaritama. Uvođenjem oznaka za prirast logaritma kosinusa kuta, pri promjeni kuta za 1″, i prirasta logaritama duljina pri promjeni duljine za 1 m

$$\Delta_i = -\frac{\mu}{\rho''}\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_i}{2}. \tag{7}$$

$$\Delta_{o_i} = \mu\,\frac{1}{o_i},\quad \Delta_{o_i - s_i} = \mu\,\frac{1}{o_i - s_i},\quad \Delta_{r_i} = \mu\,\frac{1}{r_i},\quad \Delta_{r_{i-1}} = \mu\,\frac{1}{r_{i-1}}, \tag{8}$$

konačno slijedi

$$\delta\alpha_i = \frac{\Delta_{o_i} - \Delta_{o_i - s_i}}{2\,\Delta_i}\,v_{s_i} + \frac{\Delta_{o_i} + \Delta_{o_i - s_i} - 2\Delta_{r_i}}{2\,\Delta_i}\,v_{r_i} + \frac{\Delta_{o_i} + \Delta_{o_i - s_i} - 2\Delta_{r_{i-1}}}{2\,\Delta_i}\,v_{r_{i-1}} \tag{9}$$

Izraz (9) može se uvođenjem supstitucija pisati

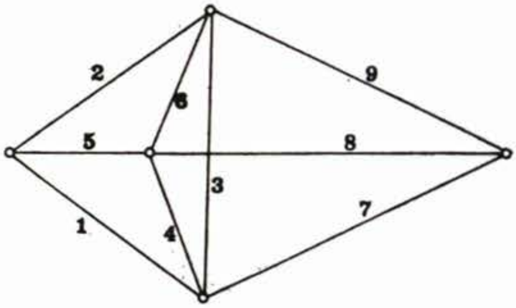
$$\delta\alpha_i = a_i\,v_{s_i} + b_i\,v_{r_i} + c_i\,v_{r_{i-1}}, \tag{10}$$

Uvrstivši izraz (10) u uvjetnu jednadžbu, bit će

$$\sum_1^n (a_i\,v_{s_i} + b_i\,v_{r_i} + c_i\,v_{r_{i-1}}) + (\sum_1^n \alpha_i^0 - 360^\circ) = 0 \tag{11}$$

Ovakvim je postupkom računanje koeficijenata uvjetnih jednadžbi svedeno na računanje prirasta logaritama kutova i duljina što na izvjesan način, predstavlja, analogiju računanja koeficijenata sinusnih uvjetnih jednadžbi u triangulaciji. Dalji se postupak izjednačenja provodi na uobičajeni način, vidi [3].

PRIMJER. Izjednačenje i ocjena točnosti trilateracijske mreže (sl. 4.) postupkom TARCZY-HORNOCHA



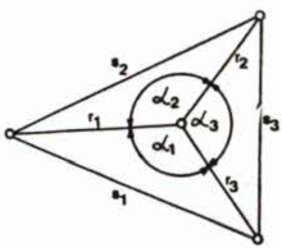
Sl. 4.

Mjerene duljine

1	965.63 m
2	943.39 m
3	655.84 m
4	514.77 m
5	657.66 m
6	427.20 m
7	1154.36 m
8	1353.51 m
9	1300.01 m

FORMIRANJE UVJETNIH JEDNADŽBI

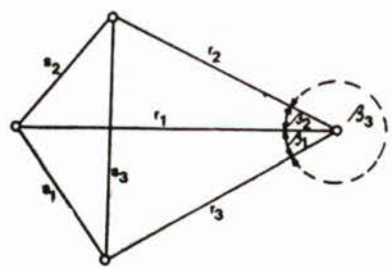
Fig. Centralni sistem



Sl. 5.

Fig.				
1	o_1	1069.03	Δo_1	4063
	$o_1 - s_1$	103.40	$\Delta o_1 - s_1$	42001
	r_1	657.66	Δr_1	6604
	r_3	514.77	Δr_3	8438
	$\alpha_1/2$	55° 09' 04."99	Δ	-30
	α_1	110° 18' 09."99		
	a_1			627
	b_1			-543
	c_1			-483
2	o_2	1014.13	Δo_2	4282
	$o_2 - s_2$	70.74	$\Delta o_2 - s_2$	61397
	r_2	427.20	Δr_2	10166
	r_1	657.66	Δr_1	6604
	$\alpha_2/2$	59° 38' 56."19	Δ	-36
	α_2	119° 17' 52."37		
	a_2			794
	b_2			-631
	c_2			-730

Fig. Geodetski četverokut



Sl. 6.

Fig.				
1	o_1	1511.32	Δo_1	2874
	$o_1 - s_1$	996.55	$\Delta o_1 - s_1$	4358
	r_1	1353.51	Δr_1	3209
	r_3	1154.36	Δr_3	3762
	$\beta_1/2$	10° 56' 44."49	Δ	-4
	β_1	21° 53' 28."97		
	a_1			182
	b_1			-100
	c_1			36
2	o_2	1540.36	Δo_2	2819
	$o_2 - s_2$	1113.16	$\Delta o_2 - s_2$	3901
	r_2	1300.01	Δr_2	3341
	r_1	1353.51	Δr_1	3209
	$\beta_2/2$	9° 11' 34."41	Δ	-3
	β_2	18° 23' 08."81		
	a_2			159
	b_2			-6
	c_2			-45

3	o_3	898. 91	Δo_3	4831
	o_3-s_3	43. 06	Δo_3-s^3	100846
	r_3	514. 77	Δr_3	8437
	r_3	427. 20	Δr_2	10166
	$\alpha^2/2$	65° 11′ 34″ 86	Δ	—46
	α_3	130° 23′ 09″ 72		
	a_3			1054
	b_3			—975
	c_3			—937
$\Sigma\alpha$		359° 59′ 12″ 08		
		360° 00′ 00″ 00		
ω_1		—47″ 92		

3	o_3	1655. 11	Δo_3	2624
	o_3-s_3	799. 27	Δo_3-s_3	5434
	r_3	1154. 36	Δr_3	3762
	r_2	1300. 01	Δr_2	3341
	$\beta_3/2$	159° 51′ 56″ 83	Δ	8
	β_3	319° 43′ 53″ 66		
	a_3			—182
	b_3			35
	c_3			89
$\Sigma\beta$		360° 00′ 31″ 44		
		360° 00′ 00″ 00		
ω_2		31″ 44		

	$\delta\alpha_1$	$\delta\alpha_2$	$\delta\alpha_3$	i
v_1	627			627
v_2		794		794
v_3			1054	1054
v_4	—483		—975	—1458
v_5	—543	—730		—1273
v_6		—631	—937	—1568
v_7				0
v_8				0
v_9				0
ω_1				—47″92

	$\delta\beta_1$	$\delta\beta_2$	$\delta\beta_3$	j
v_1				0
v_2				0
v_3			—182	—182
v_4	182			182
v_5				0
v_6		159		159
v_7	36		35	71
v_8	—100	—45		—145
v_9		—6	89	83
ω_2				31″44

UVJETNE JEDNADŽBE

$$A^t \cdot v + \omega = 0$$

$$\overset{A^t}{\begin{bmatrix} 6.27 & 7.94 & 10.54 & -14.58 & -12.73 & -15.68 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.82 & 1.82 & 0.00 & 1.59 & 0.71 & -1.45 & 0.83 \end{bmatrix}} \cdot v + \overset{\omega}{\begin{bmatrix} -0.4792 \\ 0,3144 \end{bmatrix}} = 0$$

NORMALNE JEDNADŽBE

$$N \cdot k + \omega = 0$$

$$\overset{N}{\begin{bmatrix} 833.9398 & -70.6496 \\ -70.6496 & 12.4484 \end{bmatrix}} k + \overset{\omega}{\begin{bmatrix} -0.4792 \\ 0.3144 \end{bmatrix}} = 0$$

KORELATE

$$k = -N^{-1} \cdot \omega = \begin{bmatrix} -0.00301 \\ -0.04236 \end{bmatrix}$$

RAČUNANJE POPRAVAKA I IZJEDNAČENIH DULJINA

	d	v	$\bar{d}$
1	965.63	−0.019	965.611
2	943.39	−0.024	943.366
3	855.84	0.045	855.885
4	514.77	−0.033	514.737
5	657.66	0.038	657.698
6	427.20	−0.020	427.180
7	1 154.36	−0.030	1 154.330
8	1 353.51	0.061	1 353.571
9	1 300.01	−0.035	1 299.975

KONTROLA IZJEDNAČENJA

$$v^t v = 0.0119$$

$$-\omega^t k = 0.0119$$

SREDNJA POGREŠKA POJEDINOG MJERENJA

$$m = \pm 0.077 \text{ m.}$$

KONTROLA UVJETA

Centralni sistem

α_1	110° 17′ 53″ 29
α_2	119° 17′ 18″ 04
α_3	130° 24′ 48″ 66
$\Sigma\alpha$	359° 59′ 59″ 99
	360° 00′ 00″ 00
ω_1	−0″ 01

Geodetski četverokut

β_1	21° 53′ 15″ 70
β_2	18° 23′ 03″ 09
β_3	319° 43′ 41″ 24
$\Sigma\beta$	360° 00′ 00″ 03
	360° 00′ 00″ 00
ω_2	0″ 03

LITERATURA

[1] Bilajbegović, A.: Viša geodezija, rukopis, Zagreb 1986.

[2] Feil, L.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, rukopis, Zagreb 1988.

[3] Hazay, I.: Kiegyenlito szamitasok, Tankonyvkiado, Budapest 1968.

[4] Klak, S.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1982.

[5] Mihailovic, K.: Geodezija II, Građevinska knjiga, Beograd 1974.

SAŽETAK

U ovom radu je prikazan postupak izjednačenja slobodne trilateracijske mreže postupkom Tarczy-Hornocha. Uz objašnjenje teorijske osnove prikazana je primjena na konkretnom zadatku.

ABSTRACT

In this paper is presented adjustment of free trilateration network by Tarczy-Hornoch method.

Primljeno: 1988-06-20