UDK 528.113
Originalni znanstveni rad

ODREĐIVANJE ELEMENATA ELIPSI POGREŠAKA

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

Najveći broj geodetskih točaka prikazuje se u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Najčešće se pretpostavlja da su pogreške Δy, Δx u određivanju pojedine točke slučajnog karaktera, točnije, da pripadaju dvodimenzionalnoj normalnoj razdiobi.

Neka je $u = [\Delta x \;\; \Delta y]^t$ dvodimenzionalni normalno distribuirani slučajni vektor u ravnini x, y s očekivanjem $E(u) = [0 \;\; 0]^t$ i funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f(u) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} e^{-1/2 u^t K^{-1} u}$$

gdje je

$$K = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna kovarijaciona matrica vektora u.

Nivo-krivulje funkcije f su elipse čije su jednadžbe

$$u^t K^{-1} u = t^2, \qquad t = \text{konst.}, \qquad t > 0.$$

Ove elipse zovu se *elipse konstantne gustoće vjerojatnosti* ili u geodeziji često *elipse pogrešaka*. Za $t = 1$ dobijemo tzv. standardnu elipsu pogrešaka.

Za grafički prikaz elipse u geodeziji obično koristimo njene poluosi i kut između veće poluosi i pozitivnog smjera osi x. Ove elemente elipse pogrešaka moguće je odrediti preko različitih pristupa. Ovdje predlažemo dva načina izvođenja potrebnih formula, koji nisu uobičajeni u geodeziji, a odlikuju se jednostavnošću i jasnoćom.

1. JEDAN PRISTUP ODREĐIVANJU ELEMENATA ELIPSE POGREŠAKA

Fiksirajmo najprije konstantu t, pa svedimo jednadžbu elipse

$$u^t K^{-1} u = t^2$$

* Adresa autora: Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26

na kanonski oblik. U tu svrhu moramo svesti na kanonski oblik kvadratnu formu $f = u^t K^{-1} u$. Poznato je da matrice K i K^{-1} imaju iste svojstvene vektore i recipročne svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti matrice K su rješenja kvadratne jednadžbe

$$\lambda^2 - (m_x^2 + m_y^2)\lambda + m_x^2 m_y^2 - m_{xy}^2 = 0,$$

dakle

$$\lambda_1 = \frac{m_x^2 + m_y^2 + \sqrt{(m_x^2 - m_y^2)^2 + 4m_{xy}^2}}{2} \tag{0}$$

$$\lambda_2 = \frac{m_x^2 + m_y^2 - \sqrt{(m_x^2 - m_y^2)^2 + 4m_{xy}^2}}{2}.$$

Prema poznatom svojstvu za realne simetrične matrice*, možemo napisati

$$f = u^t K^{-1} u = \zeta^t \Lambda^{-1} \zeta = \frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2}$$

sa oznakama

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix}, \qquad \zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = V u$$

gdje su stupci matrice V ortonormirani svojstveni vektori matrice K. Dakle

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2} = t^2$$

je tražena jednadžba elipse u kanonskom obliku u koordinatnom sistemu ξ, η iz koje čitamo da su njene poluosi

$$\begin{aligned} A &= t\sqrt{\lambda_1} \\ B &= t\sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \tag{1}$$

s time da je $A \geq B$ zbog $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

---

* Ako je A realna simetrična matrica, onda postoje ortogonalna matrica V i dijagonalna matrica Λ, takve da vrijedi

$$V^t A V = \Lambda.$$

Stupci matrice V su ortonormirani svojstveni vektori matrice A, a dijagonalni elementi matrice Λ su odgovarajuće svojstvene vrijednosti matrica A (bez obzira ima li među njima jednakih).

Neka je $v_1 = [v_{11}\ v_{12}]^t$ svojstveni vektor u ravnini x, y koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_1. Vrijedi

$$K\, v_1 = \lambda_1\, v_1$$

tj.

$$(m^2 - \lambda_1)\, v_{11} + m_{xy}\, v_{12} = 0$$

$$m_{xy}\, v_{11} + (m_y^2 - \lambda_1)\, v_{12} = 0$$

a odatle vidimo da je tangens kuta ϑ_1 između velike poluosi (svojstvenog vektora v_1) i pozitivnog smjera osi x

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{v_{12}}{v_{11}} = \frac{\lambda_1 - m_x^2}{m_{xy}} = \frac{m_{xy}}{\lambda_1 - m_y^2}. \tag{2}$$

Sasvim analogno možemo dobiti da je tangens kuta ϑ_2 između male poluosi (drugog svojstvenog vektora) i pozitivnog smjera osi x

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{\lambda_2 - m_x^2}{m_{xy}} = \frac{m_{xy}}{\lambda_2 - m_y^2}. \tag{3}$$

Sa (0), (1) i (2), odnosno (3), određene su poluosi elipse po duljini i smjeru. Iste formule mogu se naći u (Bjerhammar, 1973).

2. DRUGI PRISTUP ODREĐIVANJU ELEMENATA ELIPSE POGREŠAKA

Poluosi elipse

$$u^t K^{-1} u = t^2 \tag{4}$$

i njihov položaj u koordinatnom sustavu x, y u ravnini možemo dobiti ako odredimo vektore u koji zadovoljavaju (4), a imaju najveću, odnosno najmanju, vrijednost kvadrata duljine. Radi se o uvjetnom ekstremu

$$u^t u = \text{ekstrem}$$

uz uvjet (4). Postupimo na uobičajeni način za uvjetni ekstrem, tj. sastavimo pomoćnu funkciju

$$F(u, \lambda) = u^t u - \lambda (u^t K^{-1} u - t^2),$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator. Nužan uvjet za ekstrem funkcije F glasi

$$dF = 0.$$

Odatle imamo

$$u - \lambda K^{-1} u = 0 \tag{5}$$

odnosno

$$K u = \lambda u,$$

pa prepoznajemo da λ mora biti svojstvena vrijednost matrice K, a u pripadni svojstveni vektor. Dovoljne uvjete za ekstrem ne istražujemo, nego koristimo prirodu problema za zaključivanje da funkcija koju ispitujemo mora imati minimum i maksimum.

Ekstremne vrijednosti od $u^t u$ možemo odrediti i bez eksplicitnog nalaženja svojstvenih vektora na slijedeći način. Pomnožimo uvjet (4) s λ i iskoristimo (5), pa odmah dobijemo

$$(u^t u)_{ekst.} = \lambda t^2.$$

Lako se vidi da je konačno rješenje problema isto kao u prvom pristupu u prethodnom poglavlju.

3. NEKA SVOJSTVA ELIPSI POGREŠAKA

(i) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vrijedi $\mathrm{tg}\,\vartheta_1\,\mathrm{tg}\,\vartheta_2 = -1$, tj. velika i mala oplus elipse međusobno su okomite (svojstveni vektori matrice K su međusobno okomiti). Ovo svojstvo se lako dobije iz relacija (2) i (3).

(ii) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, elipsa prelazi u kružnicu, velika i mala poluos su međusobno jednake, kutevi ϑ_1, odnosno ϑ_2 nisu određeni.

(iii) Iz relacija (2) i (3) jednostavno se može dobiti da vrijedi

$$\mathrm{tg}\,2\,\vartheta_1 = \mathrm{tg}\,2\,\vartheta_2 = \frac{2m_{xy}}{m_x^2 - m_y^2}. \tag{6}$$

Zanimljivo je da se relacija

$$\mathrm{tg}\,2\,\vartheta = \frac{2m_{xy}}{m_x^2 - m_y^2} \tag{7}$$

vrlo često pojavljuje u geodetskoj literaturi kao konačna formula koja služi za određivanje kuta ϑ_1 između velike poluosi i koordinatne osi x (vidjeti npr. (Čubranić, 1980), (Klak, 1982), (Perović, 1984), (Mihailović, Vračarić, 1985), (Grossmann, 1961), (Reismann, 1962), (Wolf, 1975), (Höpcke, 1980), (Meissl, 1982)). To međutim nije dobro, jer je očito iz (6) da formulu (7) zadovoljavaju oba kuta i ϑ_1 i ϑ_2 (kut između velike poluosi i osi x i kut između male poluosi i osi x). Dakle, samo iz formule (7) nije, bez dodatnih ispitivanja, moguće odrediti kut ϑ_1 između velike poluosi i osi x. To je već uočeno, npr. u (Gotthard, 1968) i ustanovljeno da uz formulu (7) treba postaviti uvjete za kut ϑ_1 koji glase

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sin 2\vartheta_1) &= \operatorname{sgn}(m_{xy}) \\ \operatorname{sgn}(\cos 2\vartheta_1) &= \operatorname{sgn}(m_x^2 - m_y^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Tek formule (7) i (8) zajedno određuju traženi kut ϑ_1.

Zbog upravo uočene činjenice da formula (7) tek zajedno s relacijama (8) daje željeni kut ϑ_1, opredjeljujemo se radije za formulu (2), koja ne zahtijeva dodatna ispitivanja. Spomenimo još da se formule za $\operatorname{tg}\vartheta_1$ i $\operatorname{tg}\vartheta_2$ mogu naći u (Koch, 1980) i (Perović, 1984), ali u nepotpunom obliku, tj. bez pravilnog komentara koja od njih određuje koji kut.

Istaknimo na kraju, da i Helmert, koji je uveo pojam elipse pogrešaka (Helmert, 1872), određuje smjerove poluosi po formuli (jedino što koristi druge oznake)

$$\operatorname{ctg} 2\vartheta = \frac{m_x^2 - m_y^2}{2m_{xy}} \tag{9}$$

koja je ekvivalentna uobičajenoj formuli (7). Međutim, Helmert tek nakon toga određuje duljine poluosi po formuli

$$\text{poluos} = \sqrt{m_y^2 + m_{xy} \operatorname{ctg} \vartheta}. \tag{10}$$

Iz relacije (9) možemo dobiti dva kuta ϑ_1 i ϑ_2 koji se međusobno razlikuju za 90°. Relacija (10) daje duljine poluosi u smjeru ϑ_1, odnosno ϑ_2, prema (pozitivnom smjeru) osi x. Dakle, ako tražimo smjer velike poluosi, prema upravo opisanom Helmertovom postupku, moramo najprije za oba smjera ϑ_1 i ϑ_2 odrediti poluosi (prema (10)), pa vidjeti koji od ova dva kuta odgovara većoj.

Lako se može izvesti da se primjenom Helmertovih formula (9) i (10) dolazi do istih elemenata standardne elipse pogrešaka, kao i primjenom naših formula (0)—(3).

(iv) Poznato je da elementi kovarijacione matrice K, a to su m_x^2, m_y^2 i m_{xy} općenito ovise o rotaciji koordinatnog sustava oko ishodišta. Međutim, trag i determinanta matrice K su invarijantne veličine u odnosu na spomenutu rotaciju. To se vidi iz slijedećih relacija

$$\operatorname{tr} K = m_x^2 + m_y^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = (A^2 + B^2)/t^2 \tag{11}$$

$$\det K = m_x^2 m_y^2 - m_{xy}^2 = \lambda_1 \lambda_2 = A^2 B^2/t^4 \tag{12}$$

koje se mogu vrlo lako izvesti iz formula (0) i (1).

Izraz $\sqrt{\operatorname{tr} K}$ zove se u geodetskoj literaturi Helmertova (položajna) pogreška točke, dok se izraz $\sqrt{\det K}$ zove Werkmeisterova pogreška točke (Grafarend, 1972).

(v) Elipsa $u^t K^{-1} u = t^2$ upisana je u pravokutnik sa stranicama $\Delta x = \pm\, t m_x$, $\Delta y = \pm\, t m_y$. Ovo svojstvo se lako pokaže na slijedeći način.

Potražimo npr. presjek elipse i pravca $\Delta x = t m_x$. Lako dobijemo da je presjek jedna jedina točka s koordinatama $\Delta x = t m_x$, $\Delta y = t m_{xy}/m_x$, pa zaključujemo da taj pravac tangira elipsu. Sasvim analogno dokazuje se za ostala tri pravca, odnosno stranice.

4. DRUGI OBLICI FORMULA ZA ODREĐIVANJE ELEMENATA ELIPSI POGREŠAKA

Neka je poznata matrica (matrica težinskih koeficijenata)

$$Q = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{xy} & q_{yy} \end{bmatrix}$$

i m_0 (srednja pogreška jedinice težine) tako da vrijedi

$$K = m_0^2 \, Q,$$

gdje je

$$K = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{bmatrix}.$$

Umjesto formula (0)—(3) možemo za određivanje elemenata elipsi pogrešaka koristiti slijedeće formule

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{q_{xx} + q_{yy} + \sqrt{(q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{q_{xx} + q_{yy} - \sqrt{(q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2}}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} A &= m_0 \, t \sqrt{\lambda_1} \\ B &= m_0 \, t \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_1 &= \frac{\lambda_1 - q_{xx}}{q_{xy}} = \frac{q_{xy}}{\lambda_1 - q_{yy}} \\ \operatorname{tg} \vartheta_2 &= \frac{\lambda_2 - q_{xx}}{q_{xy}} = \frac{q_{xy}}{\lambda_2 - q_{yy}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ako je poznata matrica

$$N = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{bmatrix}$$

i m_0 tako da vrijedi

$$K = m_0^2 N^{-1}$$

onda umjesto formula (0)—(3) možemo koristiti relacije

$$\lambda_1 = \frac{[aa] + [bb] + \sqrt{([aa] - [bb])^2 + 4\,[ab]^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{[aa] + [bb] - \sqrt{([aa] - [bb])^2 + 4\,[ab]^2}}{2} \tag{16}$$

$$A = \frac{m_0\, t}{\sqrt{\lambda_2}}$$

$$B = \frac{m_0\, t}{\sqrt{\lambda_1}} \tag{17}$$

$$\mathrm{tg}\, \vartheta_1 = \frac{\lambda_2 - [aa]}{[ab]} = \frac{[ab]}{\lambda_2 - [bb]}$$

$$\mathrm{tg}\, \vartheta_2 = \frac{\lambda_1 - [aa]}{[ab]} = \frac{[ab]}{\lambda_1 - [bb]} \tag{18}$$

Izvod formula (14) i (15) uz (13), odnosno (17) i (18) uz (16) je vrlo jednostavan i očigledan, pa ga ispuštamo.

5. OSVRT NA ODREĐIVANJE ELIPSI POGREŠAKA PREMA PRAVILNIKU ZA DRŽAVNI PREMER

Na str. 192 Pravilnika za državni premer, I deo, Triangulacija, preporučuje se da se prilikom izjednačenja koordinata pojedinih točaka u 8. odjeljku trigonometrijskog obrasca br. 33 izračunaju elementi elipse pogrešaka.

8. Odjeljak — Računanje velike i male poluose elipse pogrešaka

$[aa] > [bb]$	$[aa] < [bb]$	
$\alpha = \frac{[bb]}{[aa]} =$ ... $\beta = \frac{[ab]}{[aa]} =$	$\alpha = \frac{[aa]}{[bb]} =$ $\beta = \frac{[ab]}{[bb]} =$	$\sqrt{[aa]} =$
A (vel. poluosa) $= \frac{m}{\sqrt{[aa]}} k_A =$	$A = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} k_A =$	$\sqrt{[bb]} =$
B (mala poluosa) $= \frac{m}{\sqrt{[aa]}} k_B =$	$B = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} k_B =$	$m =$
$\mathrm{tg}\, 2\Theta = \frac{-2\beta}{\alpha - 1} =$	$\mathrm{tg}\, 2\Theta = \frac{-2\beta}{1-\alpha} =$	
$2\Theta =$ $\Theta =$	$2\Theta =$ $\Theta =$	$\frac{m}{\sqrt{[aa]}}$
Ako je β pozit. onda je 2Θ u III kvadr. » » β negat. » » 2Θ » II »	Ako je β pozit. onda je 2Θ u IV kvadr. » » β negat. » » 2Θ » I »	
$A^2 + B^2 =$	$M_y^2 + M_x^2 =$	$\frac{m}{\sqrt{[bb]}} =$

Napomene

[1] Lako se može provjeriti da je određivanje elemenata elipse pogrešaka prema uputama u 8. odjeljku trig. obrasca br. 33 matematički korektno, no vrijedi samo u slučaju izjednačenja jedne točke. Za dvije ili više točaka postupak mora biti drugačiji.

[2] Zanimljivo je da je za popunjavanje 8. odjeljka predviđeno korištenje posebnih Tablica XXVIII iz Pravilnika za državni premer (I deo, Triangulacija, knjiga treća, Tablice za trigonometrijska i geodetska računanja u ravni i na sferoidu) iz kojih se uzimaju veličine k_A i k_B. U zaglavlju tih tablica stoje formule

$$k_A = \sqrt{\frac{1 + \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)}}, \quad k_B = \sqrt{\frac{1 + \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)}} \tag{19}$$

prema kojima su izračunate vrijednosti u tablicama. Sastavljaču tablica je očito promaklo da zbog svojstva

$$k_A k_B = \frac{1}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \tag{20}$$

koje se lako može provjeriti, umjesto formula (19) možemo napisati i nešto jednostavnije

$$k_A = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}}, \quad k_B = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}}. \tag{21}$$

Iz prethodnih napomena možemo zaključiti da je određivanje elemenata elipsi pogrešaka popunjavanjem 8. odjeljka trig. obrasca br. 33, kako je preporučeno Pravilnikom, u današnje vrijeme sigurno nespretnije rješenje od primjene odgovarajućih izraza navedenih u ovom radu.

LITERATURA

Bjerhammar, A.: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1973.

Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1980.

Gotthard, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1968.

Grafarend, E.: Genauigkeitsmasse geodätischer Netze, Deutsche geodätische Kommission, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1972.

Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechung, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

Helmert, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1872.

Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung, Walter de Gruyter, Berlin, 1980.

Klak, S.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1982.

Koch, K. R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Dümmler, Bonn, 1980.
Meissl, P.: Least Squares Adjustement a Modern Approach, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 43, Graz, 1982.
Mihailović, K., Vračarić K.: Geodezija III, Građevinski fakultet, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
Perović, G.: Račun izravnanja I, Građevinski fakultet, Naučna knjiga, Beograd, 1984.
Reissmann, G.: Die Ausgleichungsrechnung, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.
Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung, Dümmler, 1975.
Pravilnik za državni premer, I deo, Triangulacija, knjiga prva, Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Beograd 1951.
Pravilnik za državni premer, I deo, Triangulacija, knjiga treća, Tablice za trigonometrijska i geodetska računanja u ravni i na sferoidu, Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Beograd 1950.

SAŽETAK

U ovom radu dana su dva jednostavna izvoda (neuobičajena u geodetskoj literaturi) formula pomoću kojih možemo odrediti elemente elipsi pogrešaka. Osim toga navode se neka osnovna svojstva elipsi pogrešaka. Posebno je razmotreno često navođenje formule za određivanje smjera velike poluosi pomoću tangensa dvostrukog kuta, bez potpunih komentara.

ABSTRACT

The paper offers two simple derivations (not common in geodetic literature) of the formulas which enable to figure out the elements of error ellipses. Besides that, some fundamental properties of error ellipses are listed. The formula for the determination of the direction of the semimajor axis of an error ellipse using the tangent function of the double angle is frequently found in literature without a proper commentary, or with an incorrect application. That situation is especially considered in the present paper.

Primljeno: 1988-04-28