UDK 528.113
Pregledni rad

GEOMETRIJSKO TUMAČENJE SREDNJE DULJINSKE POGREŠKE

Franjo BRAUM — Zagreb*

Obzirom na suvremenu mogućnost automatskog rješavanja vrlo kompliciranih matematskih zadataka u vrlo kratkom roku danas se očito daje prednost analitičkom rješavanju pred geometrijskom. Međutim ostaje okolnost da je za samo shvaćanje problema i osnovnu kontrolu njegovog rješenja geometrijsko tumačenje zornije, jednostavnije, a time impresivnije i pouzdanije, pa se takvo tumačenje lakše pamti. Za to imamo upravo primjer u računu izjednačenja. R. Hugershoff je geometrijskom interpretacijom [2] duhovito i uvjerljivo objasnio na jednoj strani ispravnost principa »Gaussove metode minimuma sume kvadrata pogrešaka«, za što su drugi analitičkom metodom trebali neusporedivo više.

Za srednju pogrešku funkcije m_F koristimo formulu (v. [4], str. 15)

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial L_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2} m_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n} m_n\right)^2}, \tag{1}$$

gdje je $F(L_1, L_2 \ldots L_n)$ funkcija mjerenja L, $\frac{\partial F}{\partial L_i}$ parcijalna derivacija funkcije F po dotičnom mjerenju L_i, a m_i srednja pogreška dotičnog mjerenja.

Za dužinu

$$\vec{s} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y} \tag{2}$$

određivanu po koordinatnim razlikama imamo duljinu

$$F(L_1, L_2) = s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{3}$$

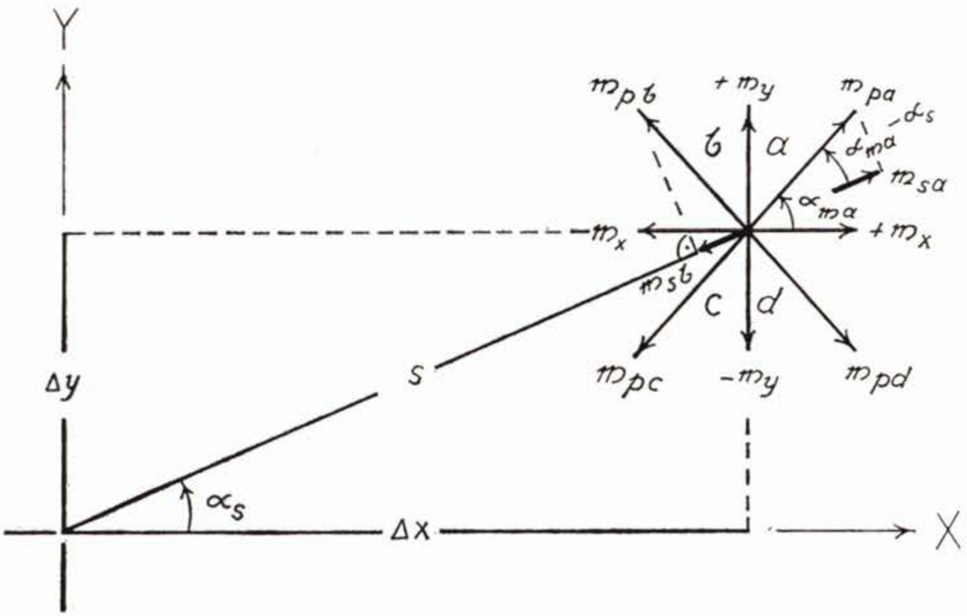
To je slučaj koji imamo kod ortogonala za dužine od početka linije do mjerene detaljne točke, dok za dužine između detaljnih točaka formula nije teoretski egzaktna, ali je praktički potpuno prihvatljiva kada se radi o točkama snimljenim sa iste linije. Općenito to kod određivanja duljine iz zadanih koor-

* Prof. dr Franjo Braum, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

dinata x, y nije strogo rješenje, ako Δx i Δy nisu neposredna mjerenja. Po formuli (1) i (3) imamo:

$$m_s = \frac{1}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(2\Delta x \cdot m_x)^2 + (2\Delta y \cdot m_y)^2} = \frac{1}{s}\sqrt{\Delta x^2\, m_x^2 + \Delta y^2\, m_y^2}. \tag{4}$$

Za geometrijsko prosuđivanje njihovih utjecaja na duljinu dužine s možemo obje srednje pogreške m_x i m_y nanijeti na kraju dužine (sl. 1). Za pojedine metode mjerenja predviđamo stanovite odnose $m_x : m_y$ kao i njihov odnos prema samoj dužini s. Time pretpostavimo apsolutne vrijednosti za m_x i m_y, a u skladu s teorijom slučajnih pogrešaka moramo predvidjeti kako njihove pozitivne, tako i negativne predznake. Na kraju dužine dobijemo četiri kvadranta a, b, c, d (sl. 1), svaki s različitom kombinacijom srednjih pogrešaka $\pm m_x$ i $\pm m_y$. Kombinacije od m_x i m_y u kvadrantu a i c ne razlikuju se ni po apsolutnoj vrijednosti, ni po smjeru, već samo po predznaku, a isto važi i za kombinacije u kvadrantima b i d.



Sl. 1. Duljinska srednja pogreška dužine određene po koordinatnim razlikama.

Stoga će biti dovoljno ispitati situaciju samo u kvadrantima a i b, tim više što srednja položajna pogreška m_p sama po sebi sadržava oba predznaka. Na sl. 1 imamo:

položajne srednje pogreške:	$\lvert m_{pa}\rvert = \lvert m_{pb}\rvert = \lvert m_p\rvert$
smjer dužine s:	$\alpha_s = \text{arc tg}\,(\Delta y : \Delta x)$
smjer položajne pogreške m_p:	$\alpha_{ma} = \text{arc tg}\,(\lvert m_y\rvert : \lvert m_x\rvert)$
	$\alpha_{mb} = 180^\circ - \alpha_{ma}$ (5).

Na duljinsku srednju pogrešku m_s djeluje samo komponenta položajne srednje pogreške m_p u smjeru dužine s, pa ćemo nju analizirati za kvadrante a i b:

$$m_{sa} = m_{pa} \cos(\alpha_{ma} - \alpha_s) = m_p (\cos \alpha_{ma} \cos \alpha_s + \sin \alpha_{ma} \sin \alpha_s) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} m_{sb} &= m_{pb} \cos(\alpha_{mb} - \alpha_s) = m_p (\cos \alpha_{mb} \cos \alpha_s + \sin \alpha_{mb} \sin \alpha_s) \\ &= -m_p (\cos \alpha_{ma} \cos \sigma_s - \sin \alpha_{ma} \sin \alpha_s). \end{aligned} \tag{7}$$

Obzirom da m_{sa} kao i m_{sb} mogu biti bilo kojeg predznaka, te jedan ili drugi mogu nastupiti istom vjerojatnosti, ali *samo jedan* od njih, to promotrimo aritmetsku sredinu njihovih kvadrata (sl. 1):

$$\begin{aligned} m_{s1,2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(m_{sa}^2 + m_{sb}^2)} = m_p \sqrt{\cos^2 \alpha_s \cos^2 \alpha_{ma} + \sin^2 \alpha_s \sin^2 \alpha_{ma}} = \\ &= \frac{1}{s} \sqrt{\Delta x^2\, m_x^2 + \Delta y^2\, m_y^2}. \end{aligned} \tag{8 = 4}$$

Obzirom na jednakosti $m^2_{sa} = m^2_{sc}$ i $m^2_{sb} = m^2_{sd}$ isti bi rezultat dobili i sa:

$$m_s = \sqrt{\frac{1}{4}(m_{sa}^2 + m_{sb}^2 + m_{sc}^2 + m_{sd}^2)} = \frac{1}{s} \sqrt{\Delta x^2\, m_x^2 + \Delta y^2\, m_y^2}. \tag{8 = 4}$$

Prema formuli (4 = 8) analitički izveden kvadrat srednje duljinske pogreške m_s (4) i dužine s (2) možemo geometrijski tumačiti kao aritmetsku sredinu kvadrata projekcija u smjer same dužine za sva četiri dijagonalna rezultantna vektora m_{pa}, m_{bp}, m_{pc}, m_{pd} u kvadrantima a, b, c, d definiranim vektoriskim križom $\pm m_x$ i $\pm m_y$ (sl. 1). Time je u formuli (4 = 8) za *srednju* duljinsku pogrešku m_s izračunata aritmetička sredina za utjecaje za sve 4 moguće kombinacije od $\pm m_x$ i $\pm m_y$, koji su utjecaji time optimalno uzeti u obzir.

Formula (4 = 8) poprima jednostavniji oblik pri upotrebljenoj pretpostavci za srednje pogreške m_x i m_y. Tako npr. imamo za: $m_x = m_y = m$: $m_s = \pm m$ što najbolje odgovara za okolnost $\Delta x \approx \Delta y$.

Kod direktnog određivanja duljine funkcija F i njena srednja pogreška glase:

$$F(L_1) = s \tag{10}$$

$$m_F = \frac{\partial F}{\partial L_1} m_1 = 1 \cdot m_s \tag{11}$$

To je trivijalni slučaj, u kojem u formulama (6 — 8) treba staviti

$$\alpha_{ma} = \alpha_s = 0 \wedge m_p = \pm m_s \tag{12}$$

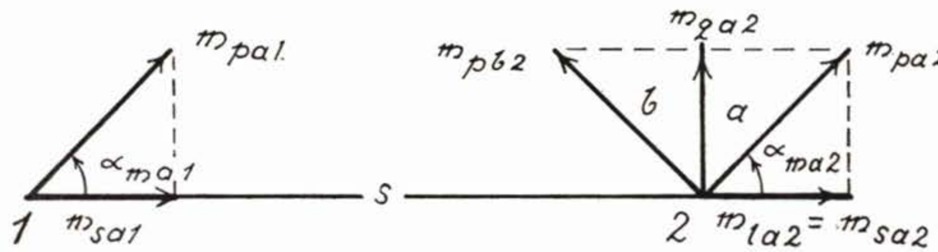
pa (4 = 8) prelazi u:

$$m_s = \pm m_s. \tag{13}$$

Da geometrijska analiza može biti zornija od analitičke pokazuje problem srednje duljinske pogreške m_s rezultirajuće iz srednjih položajnih pogrešaka m_{p1} i m_{p2} krajeva dužine. Obzirom da su pogreške m_{p1} i m_{p2} međusobno neovisne tvrdilo se u klasičnoj geodeziji, u nas kao i u kvalitetnom inozemstvu, sve do 1954. godine da je uz pretpostavku $m_{p1} = m_{p2} = m_p$

$$m_s = m_p \sqrt{2}. \tag{14}$$

To su onda opovrgli upravo fotogrametri. Kasnije je to temeljito opovrgnuto analitički na 9 stranica u [3]. Jednostavno geometrijsko obrazloženje dano je u [1,67]: Smjer položajne pogreške m_p je proizvoljan. Njen utjecaj na duljinu dužine je maksimalan (totalan) ako položajna pogreška ima smjer dužine (m_l), i minimalan (praktički nikakav) ako ona ima smjer okomit na dužinu (m_q). Uzmimo da su u srednjem komponente m_l i m_q srednje položajne pogreške m_p apsolutno jednake, to će m_p zatvarati kut od $\pm 45°$ s jednim ili drugim smjerom dužine (sl. 2).
Komponente m_l u smjeru dužine bit će



Sl. 2. Duljinska srednja pogreška dužine određene iz položajnih srednjih pogrešaka krajnjih točaka dužine.

$$m_p \cos 45° = \frac{m_p}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

a njihov ukupan utjecaj na duljinu s uz $m_{p1} = m_{p2} = m_p$ bit će

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{m_{p1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m_{p2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm m_p, \tag{16}$$

pa time formula (14) nije valjana. To daje analitički i formula (1) za F (L_1, L_2). Obzirom na geometrijski odnos (sl. 2)

$$m_l = m_s = m_{p2} \cos \alpha_2 - m_{p1} \cos \alpha_1 \tag{17}$$

bit će:

$$m_F = m_s = \sqrt{m_{p1}^2 \cos^2 \alpha_1 + m_{p2}^2 \cos^2 \alpha_2} = m_p \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = m_p. \tag{18}$$

Moram napomenuti da je formula (1) doduše namijenjena neposrednim neovisnim mjerenjima L, dok su srednje položajne pogreške m_p ovdje rezultat pogrešaka jednog skupa mjerenja. Međutim primjena te formule i za ovaj slučaj ima svoje geometrijsko opravdanje, pri čemu cos α_i predstavlja parcijalnu derivaciju funkcije.

Do istog rezultata došli bismo i geometrijskim tumačenjem proizašlim iz sl. 1 i formule (8 = 4). Na sl. 2 za razliku od sl. 1 kut $\alpha_s = 0$, pa to uvršteno u (6 — 8) daje:

$$m_{s2} = \sqrt{\frac{1}{2}(m_{sa2}^2 + m_{sb2}^2)} = \pm m_{p2} \cos \alpha_2 \text{ i analogno: } m_{s1} = \pm m_{p1} \cos \alpha_1$$

$$m_s = \sqrt{m_{s1}^2 + m_{s2}^2} = \sqrt{m_{p1}^2 \cos^2 \alpha_1 + m_{p2}^2 \cos^2 \alpha_2}\,. \qquad (19 = 18)$$

Uzmemo li za srednju duljinsku pogrešku okolnosti:

$$m_{p1} = m_{p2} = m_p \quad \wedge \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \pm 45^\circ, \qquad (20)$$

prelazi (19 = 18) u:

$$m_s = \pm m_p. \qquad (21 = 16)$$

Dakako da su potrebni i strogi detaljni analitički dokazi, međutim ne smije se, pogotovo u nastavi, izbjegavati, ni ignorirati geometrijska tumačenja, jer su ona zornija i impresivnija, te se time bolje usijeku u pamćenje i snažnije razvijaju stručni *osjećaj*, toliko važan u teoriji i praksi, negoli, katkad komplicirane, analitičke formule i njihovi izvodi.

LITERATURA:

[1] Braum, F.: »Teorija stereofotogrametrijskih pogrešaka«, Zbornik radova Geodetskog fakulteta, Publikacija br. 7, Zagreb 1970.

[2] Braum, F.: »Geometrijska interpretacija Gaussova principa izjednačenja — suma kvadrata popravaka mora biti minimum«, Geodetski list, 1984, broj 10—12.

[3] Čubranić, N.: »Srednja pogreška dužine iz položaja dviju točaka«, Geodetski list, 1956, broj 11—12.

[4] Klak, S.: »Teorija pogrešaka i račun izjednačenja«, udžbenik, Sveučilište u Zagrebu, 1986.

SAŽETAK

U članku su dana geometrijska tumačenja duljinskih pogrešaka m_s za dužine određene iz koordinatnih razlika, zatim iz krajnih točaka dužine i iz direktnog mjerenja dužine.

ABSTRACT

The geometrical interpretation of the mean sqare errors is represented for the lengths which are determined by the coordinate differences, further determined on the base of the both length end points and for the lengths directly measured.

Primljeno: 1988-08-10