

O ZAMENI LINEARNOG KVADRATNIM OCENJIVANJEM

Gligorije PEROVIĆ — Beograd*

1. UVOD

U radu [29] dokazuje se da se u metodi najmanjih kvadrata umesto (linearnih) popravaka mogu koristiti njihovi kvadrati, što je suprotno Gaussovoj postavci metode najmanjih kvadrata. S toga se nameće potreba da se odgovori na pitanje koje su to greške i nedostaci rada [29] koji su njegovog autora doveli do takvog zaključka.

2. KOMENTAR

Deo odgovora na postavljeno pitanje dat je u radu [17]. Međutim, autor ovoga rada smatra da je, radi manje upućenog čitaoca u ovu materiju, neophodno dati još neka objašnjenja.

Prva principijelna greška načinjena u radu [29] je, kako je već u radu [17] rečeno, množenje jednačine popravaka slučajnom veličinom; u ovom slučaju veličinom $(s_{i_0} + s_i)$, pri čemu je s_{i_0} — približna vrednost, a s_i — slučajna veličina (rezultat merenja).

Druga principijelna greška načinjena je posle množenja jednačina popravaka slučajnom veličinom $(s_{i_0} + s_i)$ kada se na levoj strani znaka jednakosti ta slučajna veličina zamenjuje približnom (neslučajnom!), mada autor i tu pravi još jednu grešku, a naime to ne označava sa $(s_{i_0} + s_{i_0})$ kako bi trebalo već sa $(s_i + s_i)$, a tretira kao $(s_{i_0} + s_{i_0})$; dok u desnom delu jednačine u množenju sa slobodnim članom pretvara je u slučajnu veličinu $(s_i + s_i)$, a u ostalom delu jednačine u $(s_{i_0} + s_{i_0})$ — mada opet koristi oznaku $(s_i + s_i)$.

Treća, i bitna principijelna greška ogleda se u nepoznavanju Gaussovih pretpostavki (Gauss 1809) pod kojima važi metod najmanjih kvadrata; s toga je neophodno podsetiti se da su to

1. *Linearnost*, i
2. *Nepomerenost*;

* Prof dr. Gligorije Perović, Građevinski fakultet — Institut za geodeziju, 11000 Beograd, p. fah 895, Bulevar revolucije 73/I.

pri čemu se u prvoj podrazumeva linearnost opažanja i nepoznatih parametara u funkcijama veza, a u drugoj — nepomenenost (centriranost) grešaka. U modernom matematičkom jeziku ova dva postulata poznata su pod nazivima *linearnog* i *stohastičkog* modela. Gauss-ov stohastički model podrazumevao je normalnost i nekorelisanost grešaka opažanja, dok je Markov 1900 (videti, napr. Rao 1965/1973) dokazao da metod najmanjih kvadrata važi i u slučaju bilo kog rasporeda grešaka opažanja samo da su one (greške) nepomerene, pa su s toga ove pretpostavke danas poznate kao *teorema Gauss-Markov-a*.

Na osnovi predhodno učinjenih grešaka (propusta) autor rada [29] na kraju pravi *četvrtu kardinalnu grešku*: umesto (linearnih) popravaka koristi njihove kvadrate na koje direktno primenjuje postupak metoda najmanjih kvadrata i to sa ciljem da razreši problem ocenjivanja sistematskih i slučajnih uticaja (grešaka) u merenjima i njihovim funkcijama, u kom slučaju su *narušene obe Gauss-ove pretpostavke*.

U kontekstu ovoga, interesantno je istaći i to da je autor ovoga rada autoru rada [29], još pri izradi njegovog rada [28], skrenuo pažnju na ove nekorrektnosti direktne zamene popravaka njihovim kvadratima.

Gauss je njegov famozni metod kvadrata dokazao na tri nezavisna načina. I u vezi toga istaknimo deo njegovog pisma Šumaheru 1844. godine u kome objašnjava tu metodiku, koju je u dugogodišnjem periodu objašnjavao na predavanjima na Getingenskom univerzitetu.

»Pri držanju časova na tu temu smatram korisnim da se ide putem obratnim od toga koji sam primenjivao u publikovanim istraživanjima. Ja počinjem od praktične primene metoda, upoznavajući slušaoce s detaljima u zavisnosti od uslova predavanja. I samo što uskladim vreme, ja prelazim na različite prikaze postavki metoda najmanjih kvadrata, čije upoznavanje može zainteresovati samo one koji ga umeju primenjivati u praksi. Ja imam običaj upoznati slušaoce s trima načinima zaključaka: 1) prvi zaključak zasnovan na principu svrsishodnosti; taj način je sasvim očigledan i prost; 2) drugi zaključak, saopšten u »*Theoria motus*« (Teorija kretanja) zasnovan na teoriji verovatnoće; 3) treći zaključak, također zasnovan na teoriji verovatnoće, ali sasvim različit od drugog, izložen u »*Theoria Combinationis*« (Teorija kombinacija) i, kako mi se čini, koji je unikalno prihvatljiv. Za sve koji nisu upoznati s razmatranom teorijom, ja smatram taj redosled izučavanja najsvrsishodnijim«.

Po objavljivanju »Dopuna teoriji kombinacija« Gauss govori o »moralnoj« strani primene metoda najmanjih kvadrata: »On (misli na metod najmanjih kvadrata — prim. G. P.) se sa sve većim uspehom suprotstavlja neupotrebljivim metodama izbora i ocene opažanja, koje proizlaze ili iz neznanja osnovnih pravila teorije, ili od tajne želje da merenja izgledaju što tačnije«.

On (Gauss) je, dakle, na sve aspekte u vezi metoda najmanjih kvadrata mislio i sve ih objasnio, pa se nameće logično pitanje: da li mi imamo pravo da danas, 180 godina posle Gauss-a!!!, primenjujemo metod najmanjih kvadrata a da ni njegove principe ne znamo.

Problemi koji autora rada [29] interesuju, radi kojih je i želeo dokazati zamenu popravaka njihovim kvadratima, jesu *problemi disperzione i kovarijacione analize*, a među njima posebno problemi *kvadratnog ocenjivanja* stoga je on pokušao da linearno ocenjivanje (metod najmanjih kvadrata) direktno primeni na probleme kvadratnog ocenjivanja, što ni u kom slučaju nije mo-

guće. O problematici disperzije i kovarijacije analize postoji obimna literatura, od koje bi se moglo spomenuti, na primer, a) radovi: Henderson 1953*, Cochran 1957, Cox 1957, Wilkinson 1957, Searle 1968, 1971a, Townsend 1971, i drugi; b) knjige: Anderson 1958, Scheffe 1959*, Rao 1965/1973*, Rao i Kleffe 1980/84, Koch 1980, Kshirsagar 1983, i druge; u kojoj se mogu naći odgovori na sva pitanja vezana za nju. Zato ni ovde, kao ni u metodi najmanjih kvadrata, nema mesta polemičkim pitanjima.

LITERATURA

- [1] Anderson, T. W., 1958. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, Wiley E. P. L., New Delhi.
- [2] Andonović, M. J., 1886. Osnovi računa verovatnoće i teorija najmanjih kvadrata. Kraljevsko-srpska državna štamparija, Beograd.
- [3] Bulmer, M. G., 1957. Approximate Confidence Limits for Components of Variance. *Biometrika*, Vol. 44, 159—167.
- [4] Cochran, W. G. and Carroll S. P., 1953. A Sampling Investigation of the Efficiency of Weighting Inversely as the Estimated Variance. *Biometrics*, Vol. 9, No 1—4, 447—459.
- [5] Cochran, W. G. 1957. Analysis of Covariance: Its Nature and Uses, *Biometrics*, Vol. 13, No3, 261—281.
- [6] Cox, D. R., 1957., The Use of a Concomitant Variable in Selecting an Experimental Design. *Biometrika*, Vol. 44, 150—158.
- [7] Gauss, C. F., 1809., *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*. Hamburgi, Liber II, Sectio III. (Ruski prevod: K. F. Gauss, (1957): Избранные геодезические сочинения, Том I: Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям. Гамбург, 1809. Книга вторая, Раздел третий).
- [8] Gauss, C. F., 1821.: *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiale*, (Prvi deo). Prezentirana naučnom društvu u Göttingenu 15. februara 1821. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам).
- [9] Gauss, C. F., 1823.: *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiale*, (Drugi deo). Prezentirana naučnom društvu u Göttingenu 2. februara 1823. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам).
- [10] Gauss, C. F., 1826.: *Supplementum Theoriae Combinationis Observationum erroribus minimis obnoxiae*. Prezentirana naučnom društvu u Göttingenu 16 septembra 1826. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Дополнение к теории комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам).
- [11] Henderson, C. R., 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*, Vol. 9, No 1—4, 226—252.
- [12] Johnson, R. A. and Wichern D. W., 1982. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [13] Kendall, M., 1975. *Multivariate Analysis*. Griffin, London.
- [14] Koch, K. R., 1980. *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Dümmler, Bonn.
- [15] Kshirsagar, A. M., 1983. *A Course in Linear Models*. Dekker, London-New York.
- [16] Mardia, K. V. and all., 1982. *Multivariate Analysis*. (Third Printing), AP, London — ...
- [17] Milovanović, V., 1988. Primedbe na članak: Primena posrednog izravnjanja kada se koriste kvadrati merenih veličina (dužina), *Geod. list br. 1—3*, 77.
- [18] LaMotte, L. R., 1973. Quadratic Estimation of Variance Components. *Biometrics* 29, No 2, 311—330.

* Mogu se smatrati fundamentalnim za ovu oblast.

- [19] Perović, G., 1986. Singularna izravnjanja. Naučna knjiga, Beograd.
- [20] Rao, C. R., 1973. Linear Statistical Inference and Its Applications. (Second edition). Wiley, New York.
- [21] Rao, C. R. and Kleffe J., 1984. Estimation of Variance Components, in Analysis of Variance (Second printing), Edited by P. R. Krishnaiah. North-Holland, Amsterdam —
- [22] Searle, S. R., 1968. Another look at Henderson's Methods of Estimating Variance Components. Biometrics, Vol. 24, No 4, 749—787.
- [23] Searle, S. R., 1971a. Topics in Variance Component Estimation. Biometrics, Vol. 27, 1—76.
- [24] Searle, S. R., 1971b. Linear Models. Wiley, New York — . . .
- [25] Smith, H. F., 1957. Interpretation of Adjusted Treatment Means and Regressions in Analysis of Covariance. Biometrics, Vol. 13., 282—308.
- [26] Scheffe, H., 1959. The Analysis of Variance. Wiley, New York.
- [27] Townsend, E. C. and Searle S. R., 1971. Best Quadratic Unbiased Estimation of Variance Components from Unbalanced Data in The 1-Way Classification. Biometrics, Vol. 27, 643—655.
- [28] Vračarić, K., 1978. Određivanje graničnih grešaka u geodetskim mrežama. Doktorska disertacija. Građevinski fakultet, Beograd.
- [29] Vračarić, K., 1987. Primena posrednog izravnjanja kada se koriste kvadrati merenih veličina (dužina). Geodetski list br. 7—9, 243—253.
- [30] Wilkinson, G. N., 1957. The Analysis of Covariance With Incomplete Data. Biometrics. Vol. 13, 363—372.
- [31] Williams, E. J., 1959. Regression Analysis. Wiley, New York.

SAŽETAK

U radu se ukazuje na pogrešno korišćenje kvadrata popravaka opažanja, u članku K. Vračarića (Geodetski list 1987, 7—9, 243—253), umesto popravaka opažanja u metodi najmanjih kvadrata.

ABSTRACT

The paper directs attention to an erroneous use of correction of observation squares by the author K. Vračarić (Geodetski list 1987, 7—9, 243—253), instead of correction of observations in the method of the least squares.

Primljeno: 1988-07-05