UDK 528.181
Pregledni rad

PRILOG KONTROLI KOFAKTORA IZJEDNAČENIH MJERENJA

Ladislav FEIL, Miodrag ROIĆ, Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

Klasičnim načinom ocjene točnosti, ovisno o primjenjenom postupku izjednačenja, uobičajeno se određuju: srednje pogreške pojedinih mjerenja i nepoznanica. U pravilu se zbog opsežnog računanja, ne daje ocjena točnosti izjednačenih mjerenja, što je svakako veliki nedostatak. Danas, međutim, kada su na raspolaganju suvremeni kompjutori veći opseg računanja nije prepreka, pa se zbog toga, uobičajeno provodi i ocjena točnosti izjednačenih mjerenja.

Osnova ove ocjene točnosti je matrica kofaktora izjednačenih mjerenja $Q_{\bar{l}\bar{l}}$ (koja će se radi jednostavnosti u daljnjem tekstu označavati kao $\bar{Q}$). Dijagonalni elementi te matrice koriste se za ocjenu točnosti, tj.:

$$\bar{m}_i = m_0 \sqrt{\bar{q}_i}, \tag{1}$$

gdje je:

$\bar{m}_i$ srednja pogreška i-tog izjednačenog mjerenja,
m_0 referentna srednja pogreška (srednja pogreška jedinice težine), i
$\bar{q}_i$ kofaktor i-tog izjednačenog mjerenja.

U tom postupku ocjene točnosti potrebno je provesti i *kontrolu računanja* kofaktora izjednačenih mjerenja.

Označivši težinu nekog neovisnog mjerenja s p_i i pripadni kofaktor izjednačenog mjerenja s $\bar{q}_i$, tada se prema [1] kontrola računa veličinom $\Sigma p_i \bar{q}_i$, ($i = 1, 2, \ldots, n$), koja se sastoji iz n produkata.

Proširenje ove kontrole na korelirana mjerenja nalazi se u [4], pa se kontrola sada računa veličinom $\Sigma p_{ij} \bar{q}_{ij}$ ($i = j = 1, 2, \ldots, n$), koja se sastoji iz n^2 produkata.

Prema [3] kontrolna veličina $\Sigma p_{ij} \bar{q}_{ij}$ može se prikazati kao suma produkata odgovarajućih redaka matrice težina **P** i stupaca matrice kofaktora izjednačenih mjerenja $\bar{Q}$, odnosno kao tr $(\mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{Q}})$. Na osnovi toga navedena kontrola računanja za pojedine postupke izjednačenja biti će:

* Adresa autora: Doc. dr Ladislav Feil: Miodrag Roić, dipl. inž. i Nevio Rožić, dipl. inž. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.

Izjednačenje posrednih mjerenja. Matrica kofaktora izjednačenih mjerenja (vidi [2] i [4]), računa se kao:

$$\bar{Q} = A \cdot Q_{xx} \cdot A^t, \tag{2}$$

gdje je:

A matrica koeficijenata jednadžbi popravaka, i
Q_{xx} matrica kofaktora nepoznanica (odnosno inverzna matrica koeficijenata normalnih jednadžbi).

Tada je kontrola:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,(P \cdot A \cdot Q_{xx} \cdot A^t).$$

Trag produkta invarijantan je na ciklične zamjene faktora, pa je:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,(A^t \cdot P \cdot A \cdot Q_{xx}),$$

a ako je $N = A^t \cdot P \cdot A$ i $Q_{xx} = N^{-1}$, bit će:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,\underset{u,u}{(I)} = u, \tag{3}$$

gdje je u broj nepoznanica.

Izjednačenje uvjetnih mjerenja. Matrica kofaktora izjednačenih mjerenja (vidi [2] i [4]), računa se kao:

$$\bar{Q} = Q - Q \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^t \cdot Q, \tag{4}$$

gdje je:

A matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi
N matrica koeficijenata normalnih jednadžbi, i
Q matrica kofaktora mjerenja (inverzna matrica težina mjerenja).

Tada je kontrola:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,(P \cdot Q) - \mathrm{tr}\,(P \cdot Q \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^t \cdot Q),$$

kako je $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, bit će:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,\underset{n,n}{(\,I\,)} - \mathrm{tr}\,(A \cdot N^{-1} \cdot A^t \cdot Q).$$

Koristeći pravilo ciklične zamjene faktora, dobiva se:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,\underset{n,n}{(\,I\,)} - \mathrm{tr}\,(A^t \cdot Q \cdot A \cdot N^{-1}).$$

Pri izjednačenju uvjetnih mjerenja biti će: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}$, pa je konačno:

$$\mathrm{tr}\,(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}\,\underset{n,n}{(\,I\,)} - \mathrm{tr}\,\underset{r,r}{(\,I\,)} = n - r, \tag{5}$$

gdje n označava broj mjerenja, a r broj uvjeta.

Izjednačenje posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica. Normalne jednadžbe pri ovom postupku izjednačenja su:

$$\begin{bmatrix} \underset{u,u}{N} & \underset{u,1}{B} \\ \underset{r,u}{B^t} & \underset{r,r}{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{u,1}{x} \\ \underset{r,1}{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underset{u,1}{n} \\ \underset{r,1}{-\omega} \end{bmatrix} = \underset{u+r,i}{0},$$

gdje je: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ i $n = A^t \cdot P \cdot l$.

Ako se označi:

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xk} \\ Q_{xk} & Q_{kk} \end{bmatrix},$$

blok-matrice Q_{xx} i Q_{kk} (vidi [2] i [5]) računaju se kao:

$$Q_{xx} = N^{-1} + N^{-1} \cdot B \cdot Q_{kk} \cdot B^t \cdot N^{-1}, \tag{6}$$

$$Q_{kk} = -(B^t \cdot N^{-1} \cdot B)^{-1}. \tag{7}$$

Matrica kofaktora izjednačenih mjerenja (vidi [2] i [4]) računa se prema izrazu:

$$\bar{Q} = A \cdot Q_{xx} \cdot A^t. \tag{8}$$

Tada je kontrola:

$$tr(P \cdot \bar{Q}) = tr(P \cdot A \cdot Q_{xx} \cdot A^t).$$

Koristeći pravilo cikličke zamjene faktora, dobiva se:

$$tr(P \cdot \bar{Q}) = tr(A^t \cdot P \cdot A \cdot Q_{xx}).$$

Uvrstivši sada izraz (6), bit će:

$$tr(P \cdot \bar{Q}) = tr(\underset{u,u}{I}) + tr(B \cdot Q_{kk} \cdot B^t \cdot N^{-1}).$$

a uvrštenjem izraza (7) konačno je:

$$tr(P \cdot \bar{Q}) = tr(\underset{u,u}{I}) - tr(\underset{r,r}{I}) = u - r, \tag{9}$$

gdje je u broj nepoznanica, a r broj uvjeta.

Izjednačenje uvjetnih mjerenja s nepoznanicama. Normalne jednadžbe pri ovom postupku izjednačenja su:

$$\begin{bmatrix} \underset{r,r}{N} & \underset{r,u}{B} \\ \underset{u,r}{B^t} & \underset{u,u}{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{r,1}{k} \\ \underset{u,1}{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{r,1}{\omega} \\ \underset{u,1}{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{r,1}{0} \\ \underset{u,1}{0} \end{bmatrix}.$$

gdje je: $N = A^t \cdot Q \cdot A$.

Označivši:

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{kk} & Q_{kx} \\ Q_{kx} & Q_{xx} \end{bmatrix},$$

blok-matrice Q_{kk} i Q_{xx} (vidi [2] i [5]) računaju se kao:

$$Q_{kk} = N^{-1} + N^{-1} \cdot B \cdot Q_{xx} \cdot B^t \cdot N^{-1}. \tag{10}$$

$$Q_{xx} = -(B^t \cdot N^{-1} \cdot B)^{-1}. \tag{11}$$

Matrica kofaktora izjednačenih mjerenja (vidi [2] i [4]) računa se prema izrazu:

$$\bar{Q} = Q - Q \cdot A \cdot Q_{kk} \cdot A^t \cdot Q. \tag{12}$$

Tada je kontrola:

$$\mathrm{tr}(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}(P \cdot Q) - \mathrm{tr}(P \cdot Q \cdot A \cdot Q_{kk} \cdot A^t \cdot Q),$$

odnosno:

$$\mathrm{tr}(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}(\underset{n,n}{I}) - \mathrm{tr}(A^t \cdot Q \cdot A \cdot Q_{kk}).$$

Uvrstivši sada izraz (10), bit će:

$$\mathrm{tr}(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}(\underset{n,n}{I}) - \mathrm{tr}(N \cdot N^{-1} + N \cdot N^{-1} \cdot B \cdot Q_{xx} \cdot B^t \cdot N^{-1}),$$

odnosno:

$$\mathrm{tr}(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}(\underset{n,n}{I}) - \mathrm{tr}(\underset{r,r}{I}) - \mathrm{tr}(B \cdot Q_{xx} \cdot B^t \cdot N^{-1}),$$

Uvrštenjem izraza (11), konačno je:

$$\mathrm{tr}(P \cdot \bar{Q}) = \mathrm{tr}(\underset{n,n}{I}) - \mathrm{tr}(\underset{r,r}{I}) + \mathrm{tr}(\underset{u,u}{I}) = n - r + u. \tag{13}$$

Navedeni postupak kontrole kofaktora izjednačenih mjerenja pogodan je za računanje kompjutorom, a izloženi izvodi znatno su kraći i pregledniji.

LITERATURA:

[1] Ansermet, A: Les calculs de compensation et le controle des poids. Schweiz. Zs. Verm. wesen und Kulturtechn. 1945.

[2] Feil, L.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Skripta u rukopisu, Zagreb 1987.

[3] Höpcke, W. Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung, de Gruyter Berlin, New York 1980.

[4] Reissmann, G.: Die Ausgleichungsrechnung 2. Aufl. VEB Bauwesen Berlin 1976.

[5] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung. Formel zu praktischen Anwendunng. Dümmlers Verlag, Bonn 1975.

SAŽETAK

U ovom radu izložen je postupak kontrole kofaktora izjednačenih mjerenja.

ABSTRACT

In this work is exposed a control proceeding for cofactors of adjusted measurements.

Primljeno: 1988-08-25