UDK 528.33:519.242.5
Originalni znanstveni rad

OPTIMIZACIJA GEODETSIH MREŽA MODIFIKOVANOM METODOM MINIMALNE NORME

Ivan ALEKSIĆ — Beograd*

1. REŠENJE SA MINIMALNOM NORMOM

U pristupu rešenju problema optimalnog projekta II reda, Bossler, Grafarend i Kelm pošli su od osnovne matrične jednačine

$$(A^T P A)^{-1} = Q_x \tag{1.1}$$

gde su:

— Matrica konfiguracije mreže A_{nu} poznata,

— Korelaciona matrica nepoznatih Q_x poznata,

— Matrica težina planiranih opažanja P nepoznata.

Rešenje jednačine (1.1) dobijeno je primenom pseudo inverzije u obliku

$$P = (A^T)^+ Q_x^{-1} A^+ \tag{1.2}$$

gde je pseudoinverzija

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \tag{1.3}$$

a norma matrice težina planiranih opažanja je minimalna $\|P\| = \min$. Ovo rešenje ima veliki teorijski značaj, ali ne i praktičan jer matrica težina P nije dijagonalna pa je onemogućena realizacija planiranih merenja sa korelacijom težina ove vrste.

Nakon ovog teorijskog rešenja, razvijene su mnoge druge metode optimizacije geodetskih mreža koje daju dijagonalnu matricu težina P. Ovde će biti posvećena pažnja modifikovanoj metodi sa minimalnom normom.

* Mr. Ivan Aleksić, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta, Beograd, Bulevar Revolucije 73.

2. REŠENJE OBLIKA $p^* = B^{-1} \cdot p$

U cilju iznalaženja rešenja za dijagonalnu matricu težina P^* u (Tamutus, 1979) pošlo se od rešenja sa minimalnom normom ($\|P\| = \min$)

$$\hat{P} = P = (A^T)^+ Q_x^{-1} A^+ \tag{2.1}$$

Neoznata dijagonalna matrica P mora zadovoljiti matričnu jednačinu

$$Q_x^{-1} = A^T \begin{bmatrix} p_1^* & & & \\ & p_2^* & & \\ & & \dots & \\ & & & p_n^* \end{bmatrix} A = A^T P^* A \tag{2.2}$$

Jednačine (2.1) i (2.2) daju

$$P = (A^T)^+ A^T P^* A A^+ \tag{2.3}$$

odnosno

$$P = \bar{A} P^* \bar{A} \tag{2.4}$$

gdje je

$$\bar{A} = (A^T)^+ A^T = A A^+ \tag{2.5}$$

Kvadratna simetrična matrica ili prema (1.3) i (2.5) sledi

$$\bar{A} = A (A^T A)^{-1} A^T \tag{2.6}$$

Zadržavajući samo jednačine na glavnoj dijagonali iz matrične jednačine (2.4) dobija se nov sistem jednačina

$$p = \bar{A} p^* \bar{A} = B p^* \tag{2.7}$$

ili

$$p^* = B^{-1} p \tag{2.8}$$

gde su:

$p^* = \mathrm{Diag}\,[p_{11}^*, p_{22}^*, \dots, p_{nn}^*]$	nepoznat vektor dijagonalnih elemenata matrice P*,
$p = \mathrm{Diag}\,[p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}]$	vektor dijagonalnih elemenata matrice P dobijene pod uslovom $\|P\| = \min$.
$B = \bar{A} \cdot \bar{A} = [\bar{a}_{ij}^2]_{nn}$	matrica kvadrata koeficijenata matrice $\bar{A}$.

Za sistem jednačina (2.7) u (Tamutis, 1979) se navodi: »Sistem B $p^* = p$ ima jedinstveno rešenje«.

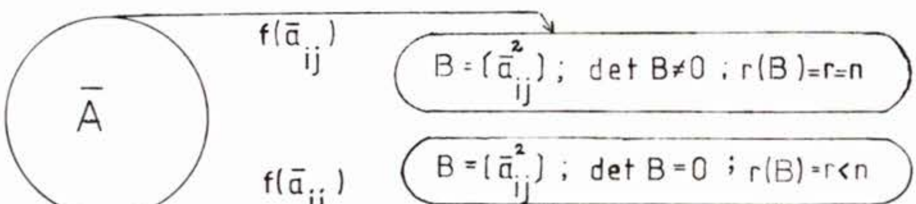
3. NOVO REŠENJE OBLIKA $p^* = \underline{B}^+ \cdot \underline{p}$

Na osnovu istraživanja izvršenih u (Aleksić 1988) odnosno, primenom ovog postupka optimizacije na više različitih geodetskih mreža, uočeno je da u opštem slučaju matrica B nema regularnu inverziju tj. det B = 0. Treba uočiti da je matrica $\bar{A}$ identična korelacionoj matrici izravnatih veličina Q_l', ($\bar{A} \equiv Q_l$) odakle nedvosmisleno sledi

det $Q_l' = 0 \wedge$ rang (Q_l') $\langle n = \rangle$ det $\bar{A} = 0 \wedge$ rang (A) $\langle$ n odnosno, da su kolone ili vrste matrice A linearno zavisne. Koeficijenti matrice B = $[b_{ji}]$ određuju se na osnovu koeficijenata matrice A, (B = $[\bar{a}_{ij}^2]$) ili u obliku

$$b_{ij} = f(\bar{a}_{ij}) = a_{ij}^2$$

To znači, da kvadratna funkcija f vrši preslikavanje koeficijenata iz skupa matrice $\bar{A}$ na skup matrice B. Ako pri preslikavanju funkcija f ne naruši ovu linearnu zavisnost onda će i kolone odnosno, vrste matrice B ostati linearno zavisne, tj. det B = 0. U suprotnom, kada se pri preslikavanju kvadratnom funkcijom naruši linearna zavisnost vrsta odnosno, kolona onda one postaju linearno nezavisne a matrica B ima determinantu det B $\neq$ 0.



Sl. 1. Preslikavanje $A \xrightarrow{f(\bar{a}ij)} B$

Koji će od ova dva slučaja nastupiti zavisi isključivo od oblika geometrije geodetske mreže.

U slučaju kada je rang r(B) = r = n sistem jednačina (2.7) ima jedinstveno rešenje i ono je oblika (2.8). Kada je rang r(B) = r$\langle$n neophodno je odrediti rang r tj. broj linearno nezavisnih vrsta odnosno, kolona matrice B. Primenom Gaussovih elementarnih transformacija na proširen sistem $[B_{nn}, P_{1n}]$, koje ne menjaju rang sistema, dobijamo redukovan sistem oblika

$$\underline{B}_{rn} \cdot p_{1n}^* = \underline{p}_{1r} \tag{3.1}$$

sa r linearno nezavisnih jednačina. Ovaj sistem je saglasan za $r(\underline{B}) = r(\underline{B}, \underline{p})$. Kako je broj nepoznatih težina n veći od broja jednačina r, (n > r) sistem nema jedinstveno rešenje. Rešenje nalazimo po metodi najmanjih kvadrata

$$(p^{\star})^{T}\, p^{\star} = \min$$

a iz ovog uslova sledi

$$p^{*} = \underline{B}^{T}(\underline{B}\,\underline{B}^{T})^{-1}\,\underline{p} \tag{3.2}$$

Jednačinu (3.1) možemo rešiti i na drugi način. Matrica $\underline{B}_{rn}$ je sa potpunim rangom vrsta $r(\underline{B}_{rn}) = r$ i za nju postoji desna uopštena inverzija oblika

$$\underline{B}_{D}^{-} = \underline{S}^{T}(\underline{B}\,\underline{S}^{T})^{-1} \tag{3.3}$$

gde su dimenzije matrica B i $\underline{S}$ identične i

$$r(\underline{B}\,\underline{S}^{T}) = r(\underline{B}) = r$$

tako da važi

$$\underline{B}\,\underline{B}_{D}^{-} = E_{r}$$

Uzimajući da je $\underline{S} = B$ dobijamo pseudo inverziju matrice $\underline{B}$ oblika

$$\underline{B}^{+} = \underline{B}^{T}(\underline{B}\,\underline{B}^{T})^{-1} \tag{3.4}$$

odnosno, rešenje sistema (3.1) je

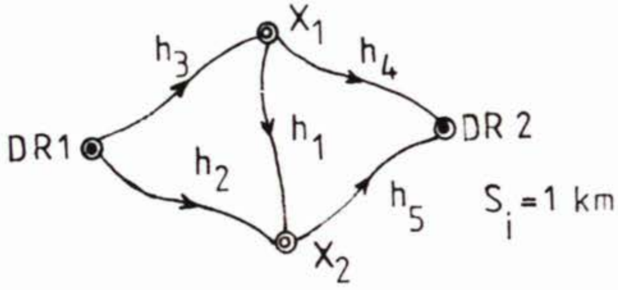
$$p^{*} = \underline{B}^{+}\,\underline{p} \tag{3.5}$$

a vektor traženih težina ima minimalnu normu $\| p^{*} \| = \min$. Rešenja (3.2) i (3.5) su identična kao i uslovi $\| p^{*} \|^{2} = (p^{*})^{T}.\, p = \min$.

U optimizaciji realnih geodetskih mreža slučaj $r(B) = r > n$ neće se pojaviti, jer rang matrice r (B) očigledno ne može biti veći od broja nepoznatih n. Rešenja (2.8) i (3.5) nisu ništa drugo do modifikacija rešenja sa minimalnom normom težina $\|P\|$. Ona praktično otklanjaju korelativnu zavisnost između pojedinih težina, što je svakako pozitivno, ali sa druge strane uvećavaju vrednosti težina P_i^{*}, $(P_i^{*} > P_i)$ pa rešenja P^{*} nemaju minimalnu normu (Aleksić, 1988) odnosno, $\|P^{*}\| > \| P \|$. Napomenimo, da za mreže sa »slabom« geometrijom moguća je pojava negativnih težina u vektoru rešenja $(P_i^{*} < 0)$. U tom slučaju optimizaciju mreže treba izvršiti nekom od metoda koje daju isključivo pozitivna rešenja $(P_i > 0)$.

4. OPTIMIZACIJA 1-D MREŽE

U mreži geometrijskog nivelmana (Sl. 2) potrebno je odrediti težine planiranih merenja kada je neophodna i dovoljna tačnost nepoznatih veličina 1 mm.



Sl. 2. Planirana merenja u 1-D mreži

Matrica konfiguracije mreže je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a kriterijum korelaciona matrica

$$Qx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{[mm^2]}$$

Obrazujemo pseudo inverziju A^+ i nađemo rešenje sa minimalnom normom $\|P\|$

$$P = (A^T)^+ Qx^{-1} A^+ = (A^T)^+ A^+ = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ & 10 & 6 & -6 & -10 \\ & & 10 & -10 & -6 \\ & \text{simetrično} & & 10 & 6 \\ & & & & 10 \end{bmatrix}$$

Dalje sledi

$$\bar{A} = A\,A^+ = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det \bar{A} = 0, \quad r(\bar{A}) = 3$$

$$B = [\overline{a}_{ij}^2] = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 9 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 9 & 1 \\ 4 & 9 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \det B = 0 \\ r(B) = 3 \end{matrix}$$

Primenom elementarnih transformacija dobijamo redukovan sistem

$$[B, p] \text{ Gauss} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 4 & 4 & : & 8 \\ 4 & 9 & 1 & 1 & 9 & : & 10 \\ 4 & 1 & 9 & 9 & 1 & : & 10 \end{bmatrix} = [\underline{B}, \underline{p}]$$

a rešenje prema (3.2) ili (3.5) je

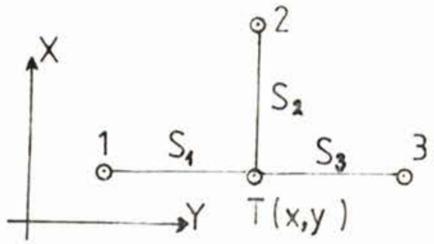
$$p^* = \underline{B}^T (\underline{B}\,\underline{B}^T)^{-1}\, \underline{p} = \underline{B}^+ \underline{p} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ tj. } P^* = \begin{bmatrix} 0.0 & & & & \\ & 0.5 & & & \\ & & 0.5 & & \\ & & & 0.5 & \\ & & & & 0.5 \end{bmatrix} [\text{mm}^{-2}]$$

Kontrola

$$Qx = (A^T P^* A)^{-1} = E$$

5. OPTIMIZACIJA 2-D MREŽE

Razmotrimo projekat mreže (sl. 3.) u kome su planirana opažanja dužina Si (i=1, 2, 3) a neophodna i dovoljna tačnost nepoznatih veličina 5 mm.



Sl. 3. Plan opažanja u 2-D mreži (poznate točke 1, 2, 3, nepoznata točka T)

Matrica konfiguracije mreže i kriterijum matrica su

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } Q_x = 25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 25 \cdot E_{[mm^2]}$$

a rešenje sa minimalnom normom matrice

$$P = (A^T)^+ Q_x^{-1} A^+ = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.00 & -0.01 \\ 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ -0.01 & 0.00 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Sada formiramo

$$\bar{A} = A A^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \det \bar{A} = 0, \quad r(\bar{A}) = 2$$

$$B = [\bar{a}_{ij}^2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det B = 0, \quad r(B) = 2$$

ili

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{bmatrix}; \quad (B\,p^* = p)$$

Primenom elementarnih transformacija na proširen sistem dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0.04 \\ 0 & 4 & 0 & : & 0.16 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0.04 \end{bmatrix} \text{ Gauss} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0.04 \\ 0 & 4 & 0 & : & 0.16 \end{bmatrix} = [\underline{B}, \underline{p}]$$

Rešenjem redukovanog sistema prema (3.2) ili (3.5) sledi

$$p^* = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.02 \end{bmatrix} \text{ ili } P^* = \begin{bmatrix} 0.02 & & \\ & 0.04 & \\ & & 0.02 \end{bmatrix} [mm^{-2}]$$

Kontrola

$$Q_x = (A^T P^* A)^{-1} = 25 \cdot E \; [mm^2]$$

LITERATURA

Mihailović, K. i Vračarić, K.: GEODEZIJA III, Beograd 1985.

Ninkov, T. Matematička optimizacija projektovanja geodetskih mreža, disertacija, Beograd 1982.

Tamutis, Z. Optimaljnie metodi proektirovani geodezičeskih setei, Moskva 1979.

Perović, G. i Ašanin S. Optimalno projektovanje gradskih poligonometrijskih mreža, Beograd 1985.

Aleksić, I. Optimizacija merenja u geodetskim mrežama, magistarski rad, Beograd 1988.

REZIME

U radu je teorijski ukazano na novu mogućnost optimizacije geodetskih mreža modifikovanom metodom sa minimalnom normom, kao i praktična primena na jednostavnoj 1-D i 2-D mreži.

ABSTRACT

The paper shows a new theoretically possibility for optimization of geodetic networks by means of modifaied method with minimum norm, as like and application in practice on simple 1-D and 2-D network.

Primljeno: 1988-05-06