UDK 528.021.1—187.4
531.221
Originalni znanstveni rad

EGZAKTNE FORMULE U TEORIJI LANČANICE UZ PRETPOSTAVKU O NERASTEZLJIVOSTI ŽICE

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

1. UVOD

O teoriji lančanice slušaju studenti geodezije na Geodetskom fakultetu u Zagrebu u predmetima Mehanika [4] i Viša geodezija [1]. Praktično mjerenje invarnim žicama obavlja se na Geodetskom fakultetu u Zagrebu u okviru jednog znanstvenog zadatka [6].

Uočimo da se u literaturi susrećemo sa starim pristupom u izvođenju formula preko razvijanja u redove, iako u današnje vrijeme kompjutera za to (bar što se tiče ove problematike) nema potrebe. Zato u ovom radu izvodimo (uz pretpostavku o nerastezljivosti žice) egzaktne formule, kao moguću zamjenu onim približnim formulama (nastalim razvojem u redove) koje se koriste u teoriji lančanice [1], [2], [3], [5]. Osim toga posebno ćemo analizirati točnost određivanja duljine projekcije kose tetive lančanice na horizont.

2. JEDNADŽBA OBIČNE LANČANICE

Pri određivanju oblika žice u ravnoteži dolazi se (vidi npr. [3], [4]) do poznate diferencijalne jednadžbe

$$dy' = \frac{q}{H}\sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{1}$$

koju možemo zapisati i u obliku

$$y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1 + y'^2} \tag{2}$$

* Miljenko Lapaine, dipl. inž. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.

gdje smo označili

$$c = \frac{H}{q}. \tag{3}$$

Svaka funkcija koja je rješenje diferencijalne jednadžbe (1), odnosno (2), zove se obična lančanica. U gornjim izrazima H je horizontalna komponenta sile zatezanja, koja je prema [4] jednaka u svim točkama lančanice. Veličina q je težina jedinice duljine žice, a c se zove parametar lančanice.

Jednadžbe (1) ili (2) mogu se rješavati na razne načine. Opredijelimo se za rješavanje jednadžbe (2). To je diferencijalna jednadžba drugog reda u kojoj se ne pojavljuje eksplicitno varijabla x. Uobičajenom supstitucijom za takve diferencijalne jednadžbe

$$y' = p \quad i \quad y'' = p\frac{dp}{dy} \tag{4}$$

u (2), lako dolazimo do relacije

$$y = c(\sqrt{1 + p^2} - C_1) = \varphi(p). \tag{5}$$

Ovakvim razmatranjem:

$$dy = \varphi'(p)\,dp \quad i \quad dy = p\,dx$$

implicira

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp,$$

odnosno

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C_2, \tag{6}$$

dobijemo da je u našem slučaju

$$x = c\,\mathrm{Arsh}\,p + C_2. \tag{7}$$

Jednadžbe (5) i (7) predstavljaju opće rješenje (u parametarskom obliku) diferencijalne jednadžbe (2). Obično se za granice integracije uzimaju takve vrijednosti (vidi [3], [4]), da su $C_1 = C_2 = 0$. Na taj način imamo jednadžbu lančanice u parametarskom obliku

$$y = c\sqrt{1 + p^2}, \quad x = c\,\mathrm{Arsh}\,p. \tag{8}$$

Za dalja istraživanja lančanice pogodno je njenu jednadžbu (8) reparametrizirati duljinom luka, tj. uvesti novi parametar

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = cp, \tag{9}$$

koji predstavljaju duljinu luka lančanice između točaka s apscisama 0 i x. Koristeći (9), (8) prelazi u

$$y = \sqrt{s^2 + c^2}, \quad x = c \operatorname{Arsh} \frac{s}{c} \tag{10}$$

što je, dakle, jednadžba obične lančanice u parametarskom obliku, gdje je parametar s duljina luka.

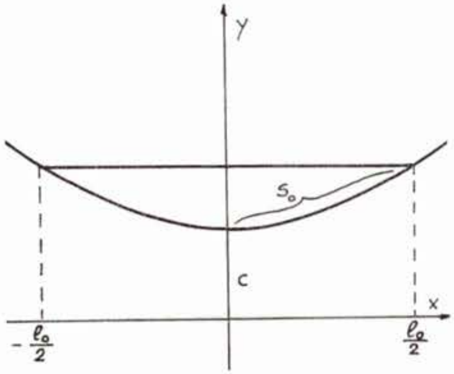
Ako iz (8) eliminiramo parametar p, ili ako iz (10) eliminiramo parametar s, možemo lako dobiti jednadžbu obične lančanice u eksplicitnom obliku

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c}. \tag{11}$$

Odatle vidimo da je lančanica simetrična u odnosu na os y, te da ima tjeme (minimum) u točki (0, c).

3. DULJINA HORIZONTALNE TETIVE I DULJINA LANČANICE U MOMENTU KOMPARIRANJA

U certifikatu o komparaciji pojedine invarne žice nalazi se podatak o duljini tetive l_0 žice u horizontalnom položaju pri sili zatezanja koja odgovara težini mase utega od 10 [kg] (za žice od 24 [m]) na mjestu kompariranja. Ako znamo još težinu jedinice duljine žice q i horizontalnu komponentu sile zatezanja, možemo odmah iz (10) izvesti slijedeće veze između l_0 i odgovarajuće duljine s_0 polovine žice (slika 1):



Slika 1. Horizontalna tetiva obične lančanice

$$l_0 = 2\,c\,\mathrm{Arsh}\,\frac{s_0}{c}, \tag{12}$$

odnosno

$$s_0 = c\,\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}. \tag{13}$$

Formule (12) i (13) nisu ništa kompliciranije od odgovarajućih starih formula (npr. formula (31) i (34) iz [3], str. 62). Prednost formule (12), odnosno (13), je u tome što vrijede za žicu bilo koje duljine, dok se kod starih formula (nastalih izvjesnim razvojima u red) mora voditi računa o tome koji članovi se mogu, a koji ne mogu zanemariti.

Da bismo ispitali s kojom točnošću je moguće odrediti duljinu s_0, diferencirajmo

$$s_0 = \frac{H}{q}\,\mathrm{sh}\,\frac{l_0\,q}{2H} \tag{14}$$

(što je zapis formule (13) uz korištenje (3)). Nakon manjeg sređivanja dobijemo

$$ds_0 = \left(s_0 - \frac{l_0}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{l_0\,q}{2H}\right)\left(\frac{dH}{H} - \frac{dq}{q}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{l_0\,q}{2H}\,dl_0. \tag{15}$$

Neka su δs_0, δl_0, δq, δH maksimalne apsolutne pogreške, tada na osnovu (15) vrijedi

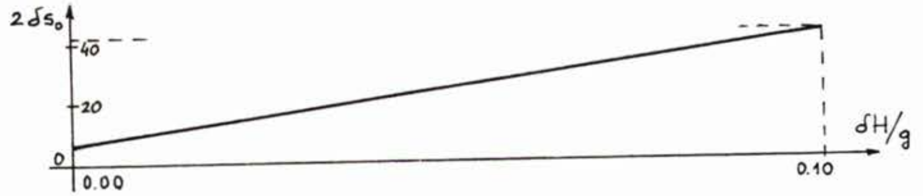
$$2\delta s_0 = \left|2s_0 - l_0\,\mathrm{ch}\,\frac{l_0\,q}{2H}\right|\left(\frac{\delta H}{H} + \frac{\delta q}{q}\right) + \mathrm{ch}\,\frac{l_0\,q}{2H}\,\delta l_0. \tag{16}$$

Za ilustraciju, istražimo kako točnost horizontalne komponente sile zatezanja utječe na točnost određivanja duljine žice u momentu kompariranja. Za $l_0 = 24$ [m], $\delta l_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ [m], $H/g = 10$ [kg]*, $q/g = 0.01732$ [kg/m], rezultati su dani u tablici 1, odnosno grafički na slici 2.

Tablica 1: Utjecaj netočnosti horizontalne komponente sile zatezanja na točnost određivanja duljine žice u momentu kompariranja

$\delta H/g$ [kg]	$2\delta s_0$ 10^{-6} [m]	$\delta s_0/s_0$
0.00	6	1 : 4 000 000
0.10	41	1 : 590 000

* Sa g smo označili ubrzanje sile teže, a u ovom radu pretpostavljamo da je konstantno (iznos nije bitan jer se u svim izrazima krati).

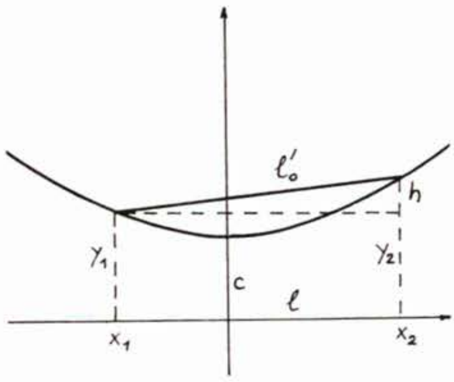


Slika 2. Utjecaj netočnosti horizontalne komponente sile zatezanja na točnost određivanja duljine žice u momentu kompariranja

4. DULJINA PROJEKCIJE KOSE TETIVE LANČANICE NA HORIZONT

Neka je niveliranjem određena visinska razlika (slika 3):

$$y_2 - y_1 = h. \tag{17}$$



Slika 3. Kosa tetiva lančanice

Pretpostavimo da je ista invarna žica između točaka s apscisama x_1 i x_2 i uravnotežena silama zatezanja čije horizontalne komponente imaju istu apsolutnu vrijednost H kao u momentu kompariranja. Zaključujemo da će žica poprimiti oblik iste lančanice kao u momentu kompariranja, pa je njezin oblik opisan jednadžbama (8), (10) ili (11).

Zadatak: Traži se $l = x_2 - x_1$ duljina projekcije kose tetive l'_0 na horizont (os x).

Napišimo (17) u obliku

$$\sqrt{s_2^2 + c^2} - \sqrt{s_1^2 + c^2} = h, \tag{18}$$

odnosno uz supstituciju

$$\frac{s_1}{c} = \operatorname{sh} \varphi_1, \quad \frac{s_2}{c} = \operatorname{sh} \varphi_2 \tag{19}$$

u obliku

$$\operatorname{ch}\varphi_2 - \operatorname{ch}\varphi_1 = \frac{h}{c}. \tag{20}$$

Kako u ovom radu pretpostavljamo da je žica nerastezljiva, mora biti

$$s_2 - s_1 = 2\,s_0, \tag{21}$$

gdje je 2 s_0 duljina žice u času kompariranja, odnosno zbog (19)

$$\operatorname{sh}\varphi_2 - \operatorname{sh}\varphi_1 = \frac{2s_0}{c}. \tag{22}$$

Shvatimo (20) i (22) kao nelinearni sistem od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice φ_1 i φ_2 i riješimo ga na slijedeći način. Primjenom osnovnih formula hiperbolne trigonometrije umjesto (20) i (22) možemo napisati

$$2\operatorname{sh}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{2s_0}{c} \tag{23}$$

$$2\operatorname{sh}\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{h}{c}. \tag{24}$$

Podijelimo (24) sa (23) dobijemo

$$\operatorname{th}\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{h}{2s_0} \tag{25}$$

odnosno

$$\varphi_2 + \varphi_1 = 2\operatorname{Arth}\frac{h}{2s_0}. \tag{26}$$

Izrazimo li th iz (25) pomoću ch i uvrstimo u (23) nakon manjeg sređivanja nalazimo

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\operatorname{Arsh}\sqrt{\left(\frac{s_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{h}{2c}\right)^2}. \tag{27}$$

Zbog (10) vrijedi

$$x_2 - x_1 = c\left(\operatorname{Arsh}\frac{s_2}{c} - \operatorname{Arsh}\frac{s_1}{c}\right), \tag{28}$$

a zbog (19)

$$x_2 - x_1 = c\,(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{29}$$

i konačno zbog (27) i (13)

$$l = x_2 - x_1 = 2c \operatorname{Arsh} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{l_0}{2c} - \left(\frac{h}{2c}\right)^2}. \tag{30}$$

Duljinu kose tetive l_0' sada možemo izračunati po Pitagorinom poučku

$$l_0' = \sqrt{l^2 + h^2}. \tag{31}$$

Time je postavljeni zadatak riješen.

Napomena 1

Iz (26) i (27) možemo lako dobiti φ_1 i φ_2:

$$\varphi_1 = \operatorname{Arth} \frac{h}{2s_0} - \operatorname{Arsh} \sqrt{\left(\frac{s_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{h}{2c}\right)^2} \tag{32}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{Arth} \frac{h}{2s_0} + \operatorname{Arsh} \sqrt{\left(\frac{s_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{h}{2c}\right)^2}. \tag{33}$$

Sada, ako želimo, možemo lako izračunati ove veličine:

$$s_1 = c \operatorname{sh} \varphi_1, \qquad s_2 = c \operatorname{sh} \varphi_2 \tag{34}$$

$$x_1 = c\, \varphi_1, \qquad x_2 = c\, \varphi_2 \tag{35}$$

$$y_1 = c \operatorname{ch} \varphi_1, \qquad y_2 = c \operatorname{ch} \varphi_2 \tag{36}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_1}, \qquad \cos \alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_2} \tag{37}$$

gdje su α_1, odnosno α_2, šiljasti kutevi između tangente u točki lančanice s apscisom x_1, odnosno x_2, i osi x. Račun je moguće kontrolirati prema

$$s_2 - s_1 = 2s_0, \quad x_2 - x_1 = l, \quad y_2 - y_1 = h. \tag{38}$$

Primjer 1

Neka je l_0 = 24 [m], H/g = 10 [kg], q/g = 0.01732 [kg/m], h = 1 [m]. Prema izvedenim formulama možemo izračunati:

c	=	577.367 206			
$2s_0$	=	24.001 728	l	=	23.979 164
φ_1	=	0.020 922	φ_2	=	0.062 454
s_1	=	12.080 468	s_2	=	36.082 196
x_1	=	12.079 586	x_2	=	36.058 750
y_1	=	577.493 574	y_2	=	578.493 574
$\cos \alpha_1$	=	0.999 781	$\cos \alpha_2$	=	0.998 053
α_1	=	1° 11′ 55″	α_2	=	3° 34′ 34″

Kontrole:

$$s_2 - s_1 = 24.001\,728$$
$$x_2 - x_1 = 23.979\,164$$
$$y_2 - y_1 = 1.000\,000$$

Napomena 2

U specijalnom slučaju kad je $h = 0$, dobijemo:

prema (30) $\quad l = l_0$

prema (32) i (33) $\quad -\varphi_1 = \varphi_2 = \operatorname{Arsh}\frac{s_0}{c} = \frac{l_0}{2c}$

prema (34) $\quad -s_1 = s_2 = s_0$

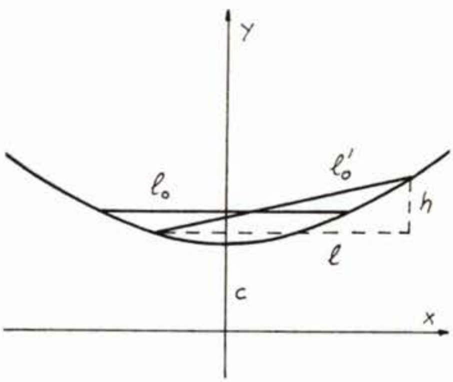
prema (35) $\quad -x_1 = x_2 = c \operatorname{Arsh}\frac{s_0}{c} = \frac{l_0}{2}$

prema (36) $\quad y_1 = y_2 = \sqrt{c^2 + s_0^2} = c \operatorname{ch}\frac{l_0}{2c}.$

Napomena 3

Neka je l_0 horizontalna tetiva lančanice, a l'_0 kosa tetiva (iste lančanice, vidi sl. 4). Ako ovim tetivama pripadaju lukovi iste duljine, tada vrijedi

$$l'_0 > l_0 \tag{39}$$



Slika 4. Kosa i horiozntalna tetiva

tj. kosa tetiva je dulja od horizontalne. Ova tvrdnja može se naći npr. u [5], ona nije očigledna, ali se može dokazati na slijedeći način. Polazimo od identiteta

$$\frac{l_0}{2c}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]\frac{l_0}{2c}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]=\left(\frac{h}{2c}\right)^2. \tag{40}$$

Jer je za svaki $x \geq 0$, $\mathrm{sh}x \geq x$, to vrijede relacije

$$\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]>\frac{l_0}{2c}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right] \tag{41}$$

$$\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]>\frac{l_0}{2c}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]. \tag{42}$$

Iz (40), (41) i (42) slijedi

$$\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}\right]>\left(\frac{h}{2c}\right)^2. \tag{43}$$

Primjenimo li jednakost

$$\mathrm{sh}\,(x+y)\,\mathrm{sh}\,(x-y)=\mathrm{sh}^2\,x-\mathrm{sh}^2\,y$$

koja se lako može dobiti iz osnovnih formula hiperbolne trigonometrije, (43) prelazi u

$$\mathrm{sh}^2\,\frac{l_0}{2c}-\mathrm{sh}^2\,\frac{l_0}{2c}\sqrt{1-\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}>\left(\frac{h}{2c}\right)^2, \tag{44}$$

što je ekvivalentno s

$$\mathrm{sh}^2\,\frac{l_0}{2c}-\left(\frac{h}{2c}\right)^2>\mathrm{sh}^2\sqrt{\left(\frac{l_0}{2c}\right)^2-\left(\frac{h}{2c}\right)^2}. \tag{45}$$

Kako vrijedi

$$\mathrm{sh}\,\frac{l_0}{2c}>\frac{l_0}{2c}>\frac{h}{2c}$$

to iz (45) slijedi

$$\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\frac{l_0}{2c}-\left(\frac{h}{2c}\right)^2}>\mathrm{sh}\sqrt{\left(\frac{l_0}{2c}\right)^2-\left(\frac{h}{2c}\right)^2} \tag{46}$$

i dalje

$$4c^2\,\mathrm{Arsh}^2\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\frac{l_0}{2c}-\left(\frac{h}{2c}\right)^2}+h^2>l_0^2. \tag{47}$$

Zbog (30), (47) prelazi u

$$l^2 + h^2 > l_0^2, \tag{48}$$

pa smo zbog (31) dokazali da vrijedi relacija (39).

Napomena 4

Označimo kao u [3]

$$a = \frac{1}{2c} \tag{49}$$

Tada se formula (30) može napisati u obliku

$$l = \frac{1}{a} \operatorname{Arsh} a \sqrt{s^2 - h^2}, \tag{50}$$

gdje je

$$s = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(a\, l_0). \tag{51}$$

Radi usporedbe, preuzmimo u [3] izvedene formule za iste veličine:

$$l = s - \frac{1}{6} a^2 s^3 - \frac{h^2}{2s} - \frac{h^4}{8s^3} + \frac{1}{4} a^2 h^2 s, \tag{52}$$

gdje je

$$s = l_0 + \frac{1}{6} a^2 l_0^3. \tag{53}$$

U čemu je prednost formule (50) pred (52)? Najprije uočimo da je izvod formule (50) dan u ovom radu relacijama (17) — (30), dok se izvod formule (52) u [3] proteže na nekoliko stranica uz devet različitih razvoja u red. Osim toga, formula (50) ne samo što je jednostavnija od (52), nego daje egzaktne vrijednosti neovisno o duljini žice, dok je formula (52) pogodna samo za žice od 24 [m], a za dulje žice treba je nadopuniti dodatnim članovima da bi se osigurala potrebna točnost.

5. ANALIZA TOČNOSTI ODREĐIVANJA DULJINE PROJEKCIJE KOSE TETIVE OBIČNE LANČANICE NA HORIZONT

Zbog (3) relaciju (30) možemo napisati u obliku

$$l = \frac{2H}{q} \operatorname{Arsh} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{l_0\, q}{2H} - \left(\frac{hq}{2H}\right)^2}. \tag{54}$$

Shvatimo l kao funkciju mjerenih veličina H, q, l_0 i h i potražimo njen diferencijal

$$dl = \frac{\partial l}{\partial H} dH + \frac{\partial l}{\partial q} dq + \frac{\partial l}{\partial l_0} dl_0 + \frac{\partial l}{\partial h} dh. \tag{55}$$

Nakon odgovarajućeg sređivanja, uz oznake

$$r = l \operatorname{sh} \frac{lq}{H}, \qquad r_0 = l_0 \operatorname{sh} \frac{l_0 q}{H} \tag{56}$$

nalazimo

$$\frac{\partial l}{\partial H} = \frac{l}{rH^2} (h^2 q + Hr - Hr_0) \tag{57}$$

$$\frac{\partial l}{\partial q} = -\frac{l}{rqH} (h^2 q + Hr - Hr_0) \tag{58}$$

$$\frac{\partial l}{\partial l_0} = \frac{l r_0}{l_0 r} \tag{59}$$

$$\frac{\partial l}{\partial h} = -\frac{lhq}{rH}. \tag{60}$$

Neka su δl, δH, δq, δl_0 i δh maksimalne apsolutne pogreške, onda na osnovu (55) — (60) vrijedi

$$\delta l = \frac{l}{r} \left[\left| r - r_0 + \frac{h^2 q}{H} \right| \left(\frac{\delta H}{H} + \frac{\delta q}{q} \right) + r_0 \frac{\delta l_0}{l_0} + \frac{hq}{H} \delta h \right]. \tag{61}$$

Od interesa je istražiti utjecaj veličine δH i δh na δl. Za ilustraciju ovog utjecaja napravljena su potrebna računanja uz $H/g = 10$ [kg], $q/g = 0.01732$ [kg/m], $\delta q/g = 5 \cdot 10^{-6}$ [kg/m], $l_0 = 24$ [m], $\delta l_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ [m]. Rezultati su dani u tablici 2, odnosno grafički na slici 5. Mijenjamo li $\delta H/g$ (npr. u granicama od 0 do 0.15 [kg]), a ostale veličine držimo konstantnim, dobijemo da je i δl praktički konstanta, tj. utjecaj maksimalne apsolutne pogreške δH na δl je zanemariv. S druge strane, utjecaj točnosti visinske razlike izražen kroz maksimalnu apsolutnu pogrešku δh jasno je izražen.

Primjetimo da smo analizirali točnost formule (30) koja je izvedena uz pretpostavku da je žica u momentu mjerenja uravnotežena silama zatezanja čije horizontalne komponente imaju istu apsolutnu vrijednost H kao u času kompariranja. Međutim, što ako ova pretpostavka nije ispunjena, nego prilikom mjerenja žicu uravnotežuju sile čije horizontalne komponente u svakoj točki imaju apsolutnu vrijednost H_1? U tom slučaju možemo zaključiti da žica neće poprimiti oblik iste lančanice kao u času kompariranja, već će poprimiti oblik jedne druge lančanice za koju vrijede jednadžbe (8), (10) ili (11) kad u njih umjesto parametra c uvrstimo

$$c_1 = \frac{H_1}{q}. \tag{62}$$

Ponovimo li sad na potpuno analogan način izvod za duljinu projekcije kose tetive lančanice na horizont prema relacijama (17) — (30), lako dolazimo do nove formule (koja odgovara formuli (30)):

$$l_1 = 2\, c_1 \operatorname{Arsh} \frac{H}{H_1} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{l_0}{2c} - \left(\frac{h}{2c}\right)^2}. \tag{63}$$

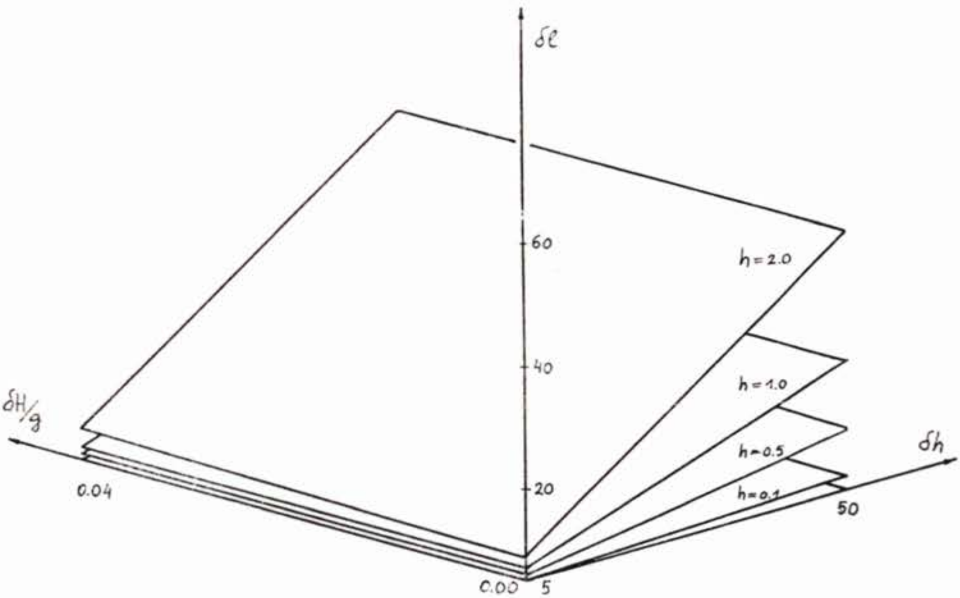
Interesira li nas uspredba veličine l_1 iz (63) i l iz (30), uočimo da se iz (63) i (30) lako dobije veza

$$l_1 = 2\, c_1 \operatorname{Arsh} \left(\frac{c}{c_1} \operatorname{sh} \frac{l}{2c}\right). \tag{64}$$

Imajući u vidu formule (12) i (13), relaciju (64) možemo riječima interpretirati na slijedeći način: l_1 je duljina horizontalne tetive na lančanici u času mjerenja kojoj pripada luk iste duljine koji bi imala horizontalna tetiva duljine l u momentu kompariranja!

Tablica 2: Ispitivanje točnosti projekcije kose tetive na horizont

h [m]	δh 10^{-5} [m]	δH/g [kg]	δl 10^{-6} [m]	δl/l
0.0	5	0.00	5.0	1 : 4 800 000
	5	0.15	5.0	1 : 4 790 000
	50	0.00	5.0	1 : 4 800 000
	50	0.15	5.0	1 : 4 790 000
0.1	5	0.00	5.2	1 : 4 610 000
	5	0.15	5.2	1 : 4 600 000
	50	0.00	7.1	1 : 3 390 000
	50	0.15	7.1	1 : 3 390 000
0.5	5	0.00	6.0	1 : 3 970 000
	5	0.15	6.1	1 : 3 940 000
	50	0.00	15.4	1 : 1 560 000
	50	0.15	15.5	1 : 1 550 000
1.0	5	0.00	7.1	1 : 3 380 000
	5	0.15	7.2	1 : 3 320 000
	50	0.00	25.9	1 : 930 000
	50	0.15	26.0	1 : 920 000
2.0	5	0.00	9.2	1 : 2 600 000
	5	0.15	9.7	1 : 2 470 000
	50	0.00	46.8	1 : 510 000
	50	0.15	47.3	1 : 510 000



Slika 5. Grafički prikaz ispitivanja točnosti projekcije kose tetive na horizont

Da bismo mogli procijeniti kakvo je slaganje, odnosno neslaganje formula (30) i (63), uzeo sam da je

$$H_1 = H + \Delta H \tag{65}$$

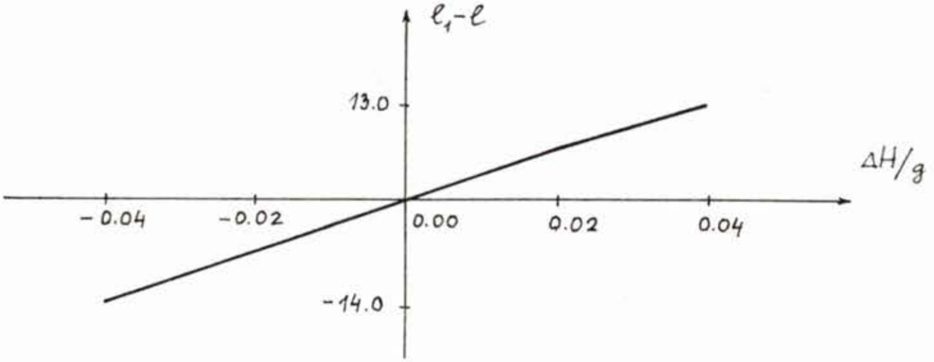
te istražio ovisnost razlike l_1—l o H, ΔH i h. Pokazalo se da je uz l_0 = 24 [m] i q/g = 0.01732 [kg/m] razlika l_1—l praktično konstantna za H/g između 9.9 i 10.1 [kg], kao i za h između 0 i 2 [m]. Ovisnost razlike l_1—l o ΔH je jasno izražena, gotovo linearna, što je vidljivo iz tablice 3 i slike 6.

Tablica 3: Ispitivanje razlike l_1—l

ΔH/g [kg]	$l_1 - l$ 10^{-6} [m]	$\frac{\lvert l_1 - l\rvert}{l}$
−0.04	−14.1	1 : 1 710 000
−0.02	− 7.3	1 : 3 300 000
0.00	0.0	0
0.02	7.1	1 : 3 400 000
0.04	13.0	1 : 1 840 000

Na kraju, procijenimo točnost računanja duljine projekcije kose tetive po formuli (63). U tu svrhu shvatimo l_1 kao funkciju mjerenih veličina H, H_1, q, l_0 i h i potražimo njen diferencijal

$$dl_1 = \frac{\partial l_1}{\partial H} dH + \frac{\partial l_1}{\partial H_1} dH_1 + \frac{\partial l_1}{\partial q} dq + \frac{\partial l_1}{\partial l_0} dl_0 + \frac{\partial l_1}{\partial h} dh. \tag{66}$$



Slika 6. Grafički prikaz ispitivanja razlike $l_1 - l$

Nakon deriviranja, odgovarajućeg sređivanja, uz oznake

$$r_1 = l_1 \operatorname{sh} \frac{l_1 q}{H_1}, \qquad r_0 = l_0 \operatorname{sh} \frac{l_0 q}{H} \tag{67}$$

možemo dobiti

$$\frac{\partial l_1}{\partial H} = \frac{l_1}{H_1^2 r_1} (H_1 r_1 - 4 s_0^2 q + h^2 q) \tag{68}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial H_1} = \frac{l_1}{H^2 r_1} (4 s_0^2 q - H r_0) \tag{69}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial q} = - \frac{l_1}{H_1 r_1 q} (H_1 r_1 - H r_0 + h^2 q) \tag{70}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial l_0} = \frac{l_1 H r_0}{l_0 H_1 r_1} \tag{71}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial h} = - \frac{l_1 q h}{H_1 r_1}, \tag{72}$$

gdje je s_0 kao u (13), odnosno (14).

Neka su δl_1, δH_1, δH, δq, δl_0 i δh maksimalne apsolutne pogreške, tada na osnovu (66) — (72) vrijedi

$$\delta l_1 = \frac{l_1}{r_1} \Big[\frac{|H_1 r_1 - 4 s_0^2 q + h^2 q|}{H_1^2} \delta H_1 + \frac{|4 s_0^2 q - H r_0|}{H^2} \delta H + \frac{|H_1 r_1 - H r_0 + h^2 q|}{H_1 q} \delta q + \frac{H r_0}{H_1 l_0} \delta l_0 + \frac{qh}{H_1} \delta h \Big]. \tag{73}$$

Od interesa je istražiti utjecaj veličine δH_1, δH i δh na δl_1. Za ilustraciju ovog utjecaja napravljena su potrebna računanja uz $H_1/g = 10$ [kg], $q/g = 0.01732$ [kg/m], $\delta q/g = 5 \cdot 10^{-6}$ [kg/m], $l_0 = 24$ [m], $\delta l_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ [m]. Za slučaj $\delta H_1 = \delta H$, rezultati su dani u tablici 4, odnosno na slici 7. Odatle vidimo kako maksimalna apsolutna pogreška δl_1 duljine projekcije kose tetive lančanice raste s rastom maksimalne apsolutne pogreške horizontalne sile zatezanja žice, odnosno s rastom maksimalne apsolutne pogreške određivanja visinske razlike između točaka čiju udaljenost tražimo.

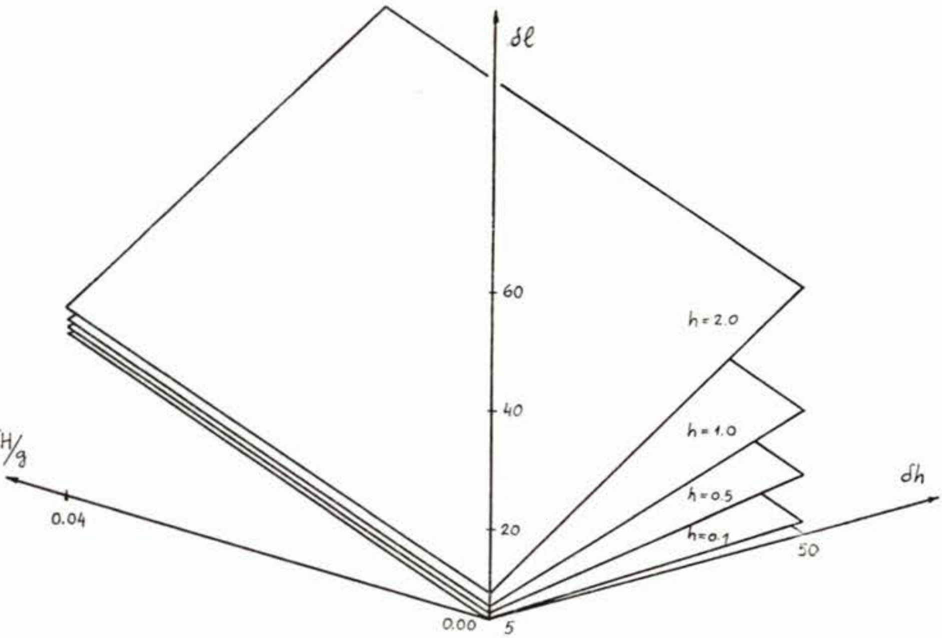
Tablica 4: Ispitivanje točnosti projekcije kose tetive na horizont

h [m]	δh 10^{-5} [m]	$\delta H/g$ [kg]	δl 10^{-6} [m]	$\delta l/l$
0.0	5	0.00	5.0	1 : 4 800 000
	5	0.04	32.6	1 : 740 000
	50	0.00	5.0	1 : 4 800 000
	50	0.04	32.6	1 : 740 000
0.1	5	0.00	5.2	1 : 4 610 000
	5	0.04	32.8	1 : 730 000
	50	0.00	7.1	1 : 3 390 000
	50	0.04	34.7	1 : 690 000
0.5	5	0.00	6.0	1 : 3 970 000
	5	0.04	33.7	1 : 710 000
	50	0.00	15.4	1 : 1 560 000
	50	0.04	43.1	1 : 560 000
1.0	5	0.00	7.1	1 : 3 380 000
	5	0.04	34.7	1 : 690 000
	50	0.00	25.9	1 : 930 000
	50	0.04	53.5	1 : 450 000
2.0	5	0.00	9.2	1 : 2 600 000
	5	0.04	36.8	1 : 650 000
	50	0.00	46.8	1 : 510 000
	50	0.04	74.4	1 : 320 000

Nova formula (63), koja uzima u obzir da su horizontalne komponente sile zatezanje žice prilikom kompariranja i mjerenja općenito različite, je poopćenje formule (30), koja je opet elegantniji i u današnje vrijeme spretniji oblik postojećih formula ([1], [3], [5]) za određivanje duljine projekcije kose tetive lančanice na horizont. Formula (63) nije jednostavno primjenjiva kod praktičnog mjerenja, jer se na terenu veličine H_1 u pravilu ne određuje. Smisao ove formule je prvenstveno u mogućnosti dobivanja realnije ocjene točnosti traženih veličina.

Napomena 5

Računanja ze sve numeričke ilustracije u ovom radu izvedena su pomoću računala Commodore 64 Geodetskog fakulteta u Zagrebu.



Slika 7. Grafički prikaz ispitivanja točnosti projekcije kose tetive na horizont

Napomena 6

Mnogi faktori koji se susreću pri mjerenju invarnim žicama, a utječu na točnost, kao npr. istezanje, čitanje na skalama, utjecaj temperature itd., u ovom radu namjerno, zbog lakšeg tumačenja, nisu razmatrani. Pokušat ćemo neke od njih obuhvatiti u jednom drugom radu.

Zahvala

Najljepše se zahvaljujem prof. dr. Rudolfu Mišiću, prof. dr. Miljenku Solariću i kolegi Svetozaru Petroviću na uloženom trudu pri čitanju rukopisa ovog rada i na korisnim sugestijama.

LITERATURA

[1] Bilajbegović, A.: Predavanja iz Više geodezije, rukopis, Zagreb, 1984.
[2] Činklović, N.: Metode preciznih geodetskih merenja, Građevinski fakultet — Beograd, Naučna knjiga, Beograd, 1983.
[3] Čubranić, N.: Viša geodezija 1, II izdanje, Sveučilište u Zagrebu, 1974.
[4] Mišić, R.: Mehanika za studente više stručne spreme Geodetskog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu, 1971.
[5] Muminagić, A.: Viša godezija I, Građevinski fakultet Sarajevo, 1981.

[6] Novaković, G., Džapo, M., Lasić, Z.: Prvo mjerenje duljine kalibracijske baze Geodetskog fakulteta u Zagrebu invarskim žicama, Geodetski list 1985, 10—12, 291—296.

SAŽETAK

U ovom radu dane su u novom obliku jednadžbe obične lančanice, duljine lančanice u momentu komparirania i duljine projekcije kose tetive lančanice na horizont. Analizirana je točnost određivanja duljine lančanice, te točnost određivanja projekcije kose tetive na horizont. Nadalje, izvedena je poopćena formula za duljinu projekcije kose tetive na horizont, uz pretpostavku da se horizontalne komponente sile zatezanja (koje uravnotežuju lančanicu) u momentu kompariranja i u momentu mjerenja mogu razlikovati. Ova formula uspoređena je s prije izvedenom, a na kraju je analizirana točnost određivanja duljine projekcije kose tetive lančanice na horizont po novoj formuli.

ABSTRACT

The paper offers a new form of the following expressions: the equation of the catenary, the length of the catenary at the moment of calibration, and the length of the projection to the horizont of the inclined chord of a catenary. The accuracies of the determination of both mentioned lengths have been analyzed. Furthermore, a generalized formula for the length of the projection of an inclined chord to the horizon has been developed under assumption that the horizontal components of the stretching force (which keep the catenary in equilibrium), at the instant of calibration and at the instant of measurement may be different. The resulting formula is compared to the former one, and the accuracy obtainable using the new formula, has been analyzed.

Primljeno: 1988-04-29