UDK 528.14
Originalni znanstveni rad

KOLOKACIJA METODOM NAJMANJIH KVADRATA*

Helmut MORITZ — Graz

1. UVOD

U današnje vrijeme imamo na raspolaganju ogromnu količinu geodetskih podataka svake vrste, terestrička i satelitska mjerenja, koji imaju različitu točnost i često nepovoljan raspored. Problem je u tome kako da najbolje iskoristimo i kombiniramo ove podatke za određivanje figure Zemlje i njezinog gravitacionog polja. Kolokacija metodom najmanjih kvadrata namijenjena je upravo rješavanju ovog problema.

Postavlja se pitanje zašto nije moguće u ovu svrhu primjeniti obično izjednačenje metodom najmanjih kvadrata. U tom slučaju imamo poteškoću da broj nezavisnih parametara mora biti manji nego broj mjerenih veličina. Međutim, gravitaciono polje Zemlje je toliko nepravilno da njegovo potpuno matematičko opisivanje zahtijeva beskonačan broj parametara, npr. koeficijenata reda sfernih funkcija. Doduše, u posebnim slučajevima možemo se zadovoljiti ograničenim brojem ovih koeficijenata, ali u općem slučaju, prije svega kod kombinacije globalnih (satelitskih) i lokalnih (terestričkih) mjerenja, to je nemoguće ili barem neprirodno.

Dakle, broj je nepoznanica, isto kao i broj mjerenja, beskonačan, pa prema tome pretpostavka primjene obične metode najmanjih kvadrata nije umjesna.

Kako smo upravo vidjeli, uzrok ove teškoće leži u tome da je Zemljino gravitaciono polje u najvećoj mjeri nepravilno. Ali baš ta nepravilnost ukazuje na put za rješenje zadataka, jer znamo da matematička teorija nepravilnih pojava i nije ništa drugo nego — matematička statistika. Eto razloga zašto nužda postaje vrlinom, pa raspravljamo o poremećajnom gravitacionom polju na statistički način. Tako se rađala kolokacija.

Pioniri statističkog obrađivanja gravitacionog polja bili su de Graaf — Hunter 1935. godine, Hirvonen 1956. i Kaula 1959. godine. Metoda koja je

---

* Ovo predavanje je redovni univ. prof. dr. ing. dr. h. c. Helmut Moritz, predstojnik Odjela za fizikalnu geodeziju Tehničkog univerziteta u Grazu, održao u Zagrebu, 23. 02. 1988. god., prilikom njegove nedavne posjete Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tekst predavanja profesor Moritz je sam napisao na odličnom hrvatsko-srpskom jeziku, tako da ga ovdje prenosimo skoro bez jezičnih intervencija. Našem se veoma uglednom i zaista dragom gostu još jednom iskreno zahvaljujemo na ovom izuzetnom izrazu prijateljske sklonosti prema jugoslavenskoj geodeziji i njenim stručnjacima.

prethodila kolokaciji bila je primjena predikacije metodom najmanjih kvadrata (teorija Kolmogorova — Wienera) za interpolaciju i ekstrapolaciju gravitacionih anomalija u mojem radu 1962. godine. Ova se metoda interpolacije brzo širila u geodeziji, počevši od rada Rappa iz 1964. godine.

Ipak je kolokacija u istinskom značenju nastala iz uopćenja predikacije na proizvoljne nejednolike geodetske podatke zahvaljujući radovima Kaule u 1963. godini i osobito Krarupa iz 1968. godine.

Danas je metoda kolokacije općeprihvaćena i čak vrlo popularna. Problem sada nije u tome da opravdamo kolokaciju ili da ju propagiramo, nego da pokušamo ograničiti njezinu pretjeranu primjenu na nezgodne slučajeve.

Ja se osobito radujem da je također u Jugoslaviji kolokacija dobro poznata, kako to pokazuju svezak br. 3 knjige »Geodezija« profesora Mihailovića i, razumije se, upućeni mi ljubazni poziv u Zagreb.

Tako je nastala kolokacija kao statistička metoda. Ali ipak je vrlo značajna činjenica da kolokaciju možemo smatrati isto tako za čisto analitičku metodu teorije aproksimacije.

Ovo gledište je osobito važno u primjenama u fizikalnoj geodeziji, jer pokazuje da kolokacija potpuno očuvava matematičku strukturu gravitacionog polja i da statistika ne »zamazuje« tu strukturu.

U mojem predavanju najprije ću skicirati statističke osnove kolokacije, a potom ju izložiti sa gledištta matematičke teorije aproksimacije.

2. PREGLED STATISTIČKE TEORIJE KOLOKACIJE

U običnom izjednačenju po najmanjim kvadratima jednadžba opažanja ima slijedeći oblik:

$$\underline{v} = \underline{AX} - \underline{l} \tag{1}$$

gdje je:

$\underline{l}$ = vektor mjerenih veličina.
$\underline{v}$ = vektor popravaka,
$\underline{X}$ = vektor nepoznatih parametara,
$\underline{A}$ = poznata matrica koeficijenata.

Ako stavimo

$$\underline{n} = -\underline{v}$$

možemo (1) napisati u obliku

$$\underline{l} = \underline{AX} + \underline{n}. \tag{2}$$

Tako se mjerenje $\underline{l}$ sastoji iz dva dijela:

1. funkcionalni ili sistematski dio $\underline{AX}$ (u linearnom ili lineariziranom obliku)
2. stohastički dio $\underline{n}$, koji se sastoji iz slučajnih pogrešaka mjerenja (»noise«, šum).

Princip najmanjih kvadrata,

$$\underline{n}^T \underline{D}^{-1} \underline{n} = \text{minimum} \tag{3}$$

dovodi do rješenja

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{D}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{D}^{-1} \underline{l}, \tag{4}$$

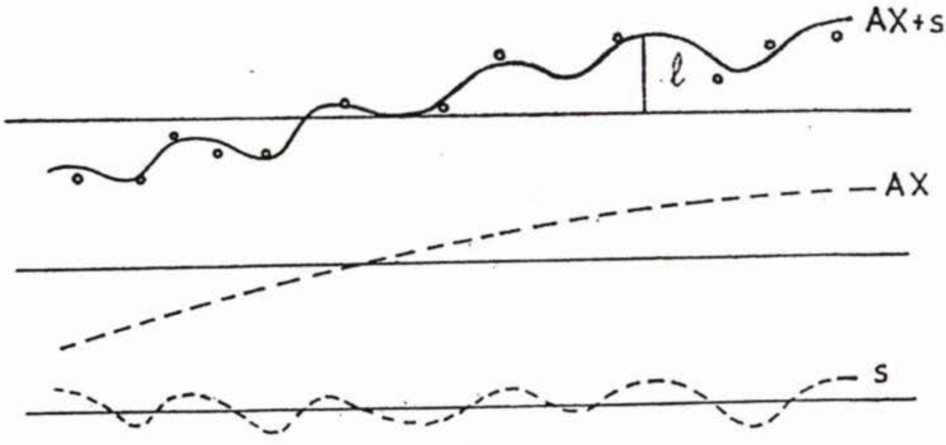
gdje je $\underline{D}$ kovariaciona matrica (ili:matrica kovarijanci) pogrešaka mjerenja.

Model kolokacije donosi slijedeće uopćenje formule (2):

$$\underline{l} = \underline{AX} + \underline{s} + \underline{n}. \tag{5}$$

Ovdje imamo novi element: drugu stohastičku veličinu koja se zove *signal*. U fizikalnoj geodeziji signal $\underline{s}$ obilježava utjecaj poremećajnog gravitacionog polja na mjerenje $\underline{l}$.

Objasnimo model (5) pomoću nekoliko primjera. Neka $\underline{l}$ bude neko satelitsko mjerenje, onda $\underline{AX}$ predstavlja normalnu putanju satelita, gdje se X sastoji iz orbitalnih parametara, s izražava poremećaje orbite zbog nepravilnosti gravitacionog polja, a vektor $\underline{n}$, kao uvijek, uključuje pogreške mjerenja, (vidi sl. 1).



Sl. 1.

Kao drugi primjer uzimamo mjerenje ubrzanja sile teže g. U tom slučaju $\underline{l}$ predstavlja g, sistematski dio jednostavno je normalna teža γ, a signal $\underline{s}$, razumije se, izražava anomaliju sile teže Δg.

Lako uočavamo da sva geodetska mjerenja bez izuzetaka možemo predstavljati u obliku (5). Doista, rastavljanje $\underline{AX} + \underline{s}$ suglasno je sa rastavljanjem gravitacionog polja u normalni i poremećajni dio, a $\underline{n}$ izražava utjecaj pogrešaka opažanja.

Slično izrazu (3) imamo uopćeni princip najmanjih kvadrata:

$$\underline{s}^T \underline{C}^{-1} \underline{s} + \underline{n}^T \underline{D}^{-1} \underline{n} = \text{minimum}, \tag{6}$$

koji dovodi do rješenja

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{C}_{ll}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_{ll}^{-1} \underline{l}, \tag{7}$$

$$\underline{s} = \underline{C}_{sl} \underline{C}_{ll}^{-1} (\underline{l} - \underline{AX}). \tag{8}$$

Ovdje

$$\underline{C}_{ll} = \underline{C} + \underline{D} \tag{9}$$

označava ukupnu kovariacionu matricu, koja se sastoji iz kovariacione matrice $\underline{C}$ signala $\underline{s}$ i kovariacione matrice $\underline{D}$ slučajnih grešaka $\underline{n}$; osim toga $\underline{C}_{sl}$ je matrica kovarijanci između $\underline{s}$ i $\underline{l}$.

Kao sva rješenja metodom najmanjih kvadrata, (7) i (8) udovoljavaju, pored (6), još i drugom uvjetu minimuma: ova rješenja imaju najveću točnost u usporedbi sa svim drugim linearnim procjenama (minimalne srednje pogreške traženih veličina).

Dakle, kolokaciju je moguće smatrati kao zajedničko uopćenje ili sintezu izjednačenja i predikcije po najmanjim kvadratima. Kolokacija omogućava da složimo i ujedinimo najraznovrsnije geodetske podatke — klasična mjerenja kuteva i udaljenosti, astronomska opažanja, mjerenja sile teže, satelitska opažanja raznih vrsta, itd. — za optimalno određivanje Zemljinog oblika i gravitacionog polja.

Prema najnovijoj modi kolokaciju možemo smatrati »crnom kutijom« (»black box«) sa svim geodetskim podacima kao »ulazom« (input) i s figurom i gravitacionim poljem Zemlje kao »izlazom« (output) . . .

Glavna poteškoća kod ove metode je u neophodnosti invertiranja velikih matrica. Ipak, slične teškoće pojavljuju se također i u drugim okolnostima (Nova sjevernoamerička geodetska mreža ima preko pola milijuna nepoznanica!). Postoje i neka slična rješenja: reprezentativan izbor podataka i višestepeno računanje kolokacije.

Zato da bi bila garantirana kompatibilnost svih raznovrsnih informacija, neophodno je da sve kovarijance izvodimo iz jedne jedine kovariacione funkcije (ili: funkcije kovarijance). Ukupno to odražava točnu analitičku strukturu gravitacionog polja, kako ćemo odmah vidjeti.

3. KOLOKACIJA SA ANALITIČKOG STAJALIŠTA

Glavna funkcija koja opisuje Zemljino gravitaciono polje jest poremećajni potencijal T, tj. razlika između stvarnog i normalnog potencijala sile teže.

Pokušajmo da funkciju T aproksimiramo pomoću linearne kombinacije q baznih funkcija $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$:

$$T(P) \doteq f(P) = \sum_{k=1}^{q} b_k \varphi_k(P), \tag{10}$$

gdje je P točka u trodimenzionalnom prostoru, a b_k označava koeficijente.

Interpolacija. Neka su dane vrijednosti funkcije T (bez pogrešaka) u q točaka P_i. Tada možemo zahtijevati da u ovih q datih točaka aproksimacija f, prema (10), točno reproducira T. S oznakom

$$f(P_i) = T(P_i) = f_i \quad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{11}$$

dobijamo iz (10) slijedeće uvjete:

$$\sum_{k=1}^{q} A_{ik} b_k = f_i \qquad A_{ik} = \varphi_k(P_i). \tag{12}$$

Oni predstavljaju q linearnih jednadžbi za q nepoznanica, koje općenito imaju jedinstveno rješenje.

Kolokacija. Uopćenje zadataka interpolacije sastoji se u slijedećem. Zahtijevamo da se reproduciraju q vrijednosti linearnih funkcionala L_1T, L_2T, $\ldots, L_qT$. Takvi funkcionali su, na primjer, vrijednosti komponenti otklona vertikale

$$\xi = -\frac{1}{G}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \eta = -\frac{1}{G}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{13}$$

i anomalije sile teže

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{R} T \tag{14}$$

u izvjesnim točkama. Ovdje xyz označava lokalni (vertikalni) koordinatni sistem, a R = 6370 km je srednji radius Zemlje.

S oznakom

$$L_i f = L_i T = l_i \tag{15}$$

dobijamo iz (10) uvjete

$$\sum_{k=1}^{q} B_{ik} b_k = l_i \qquad B_{ik} = L_i \varphi_k, \tag{16}$$

to jest sistem qxq linearnih jednadžbi sasvim sličan (12). Takva metoda prilagođenja analitičkog izraza na q datih funkcionala zove se **kolokacija** i često se primjenjuje u numeričkoj matematici.

Jasno je da je interpolacija specijalan slučaj kolokacije, gdje su L_i »proračunski funkcionali« (evaluation functionals).

Tako vidimo da u kolokaciji, isto tako kao i u interpolaciji, određivanje koeficijenata b_k za dati skup baznih funkcija zahtijeva uvijek rješavanje sistema qxq linearnih jednadžbi (općenito, nesimetričnih).

Interpolacija po najmaniim kvadratima. Bazne funkcije φ_i (P) možemo izabrati na taj način da dobijemo najmanje srednje pogreške interpolacije. Taj uvjet dovodi do

$$\varphi_k(P) = K(P, P_k) \tag{17}$$

gdje K(P,Q) označava kovariacionu funkciju potencijala T, koja je analitička i simetrična u P i Q. Na taj način se (12) pretvara u simetričan sistem, koji nije ništa drugo nego dobro poznata metoda Wienera — Kolmogorova za predikciju stohastičkih procesa.

Kolokacija po najmanjim kvadratima. Uvjet minimalnih srednjih pogrešaka rezultata dovodi ovdje do

$$\varphi_k(P) = L_k^Q K(P, Q) \tag{18}$$

gdje L_k označava da se linearni funkcional L_k primjenjuje na varijabilu Q. Tada u (16) imamo simetrične veličine

$$B_{ik} = L_i^P L_k^Q K(P, Q) = C_{ik} \tag{19}$$

i sa

$$\varphi_k(P) = L_k^Q K(P, Q) = C_{Pk} \tag{20}$$

dobijamo

$$f(P) = [C_{P1}\; C_{P2} \ldots C_{Pq}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \ldots & C_{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Jednadžbe (19) i (20) izražavaju zakon rasprostiranja kovarijanci i osiguravaju egzaktnu analitičku strukturu metode.

Očigledno je da se (21) svodi na (8) u odsustvu slučajnih pogrešaka n i sistematskih parametara X. Također je jasno da u slučaju kada (15) $\rightarrow$ (11), tj. kada je $l_i = L_i T = T(P_i) = f_i$, kolokacija prelazi u interpolaciju, i tada (21) predstavlja interpolacionu formulu.

4. PRIMJENE KOLOKACIJE

Želim da moje predavanje završim s vrlo kratkim napomenama u vezi primjene kolokacije. Glavno područje primjene je bez sumnje fizikalna geodezija: od interpolacije anomalija sile teže, preko globalnog računanja detaljnog geoida u Austriji. Pored svega toga, primjena kolokacije je moguća u svim slučajevima gdje imamo, osim slučajnih pogrešaka, još i drugu stohastičku veličinu *s;* vidi (5).

Taj »signal« može predstavljati deformacije stereomodela u fotogrametriji, pogreške podjele limba na teodolitima, itd. U fizikalnoj geodeziji kolokacija je primjenjiva gotovo automatski, dok druge primjene zahtijevaju veću opreznost.