

## UTJECAJ PLIMNIH VALOVA ZEMLJE NA OSNOVNE GEODETSKE RADOVE

Asim BILAJBEGOVIĆ — Zagreb\*

### 1. UVOD

Osnovna sila na Zemlji (sila ubrzanja sile teže) nije konstantna veličina i podložna je vremenskim promjenama. Osnovni vektor u prostoru na koji se baziraju geodetska mjerenja je vremenski promjenjiv vektor, tj. vektor ubrzanja sile teže. To dakako nameće zadatak geodeziji da oblik Zemlje ne razmatra kao statički problem, nego da položajnim koordinatama doda četvrtu koordinatu, u stvari vrijeme. Plimni valovi Zemlje su ne samo funkcije vremena nego i položaj točaka na Zemljinoj površini. U ovom radu razmatrat će se navedene deformacije na području SFRJ.

### 2. KRATKI MATEMATIČKI PRIKAZ PROBLEMA

Pomake na površini Zemlje prouzrokovane gravitacijskim slikama Mjeseca i Sunca i elastičnosti Zemlje možemo prikazati opće poznatim izrazima (v. [10])

$$\begin{aligned} s_r &= s_1 = (h_n/g) \cdot W_n && \text{u smjeru polumjera} \\ s_\Theta &= \frac{l_n}{g} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \Theta} && \text{u smjeru meridijana} \\ s_\lambda &= \frac{l_n}{g \sin \Theta} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \lambda} && \text{u smjeru prvog vertikala} \end{aligned} \quad (2-1)$$

gdje su:

- $h$  i  $l$  — Love-ovi brojevi koji karakteriziraju elastičnost Zemlje
- $W_n$  — potencijal gravitacijskih djelovanja Mjeseca i Sunca na Zemlju
- $g$  — ubrzanje sile teže u promatranoj točki
- $\Theta$  — polarna udaljenosti, kut između male poluosi elipsoida i radius vektora promatrane točke.

\* Adresa autora: Prof. dr Asim Bilajbegović, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26

Ako se ograničimo na Legendreove polinome 2. i 3. stupnja za utjecaj Mjeseca, odnosno 2. stupnja za utjecaj Sunca onda potencijal Zemljinih plimnih valova možemo dati izrazom:

$$W_n = G_m \cdot \sum_{i=2}^3 \sum_{j=0}^i \left[ \frac{r}{r_0} \right]^i \cdot M_{ij} \cdot N_{ij} + G_s \cdot \sum_{j=0}^2 \left[ \frac{r}{r_0} \right]^2 \cdot M'_{2j} \cdot N'_{2j} \quad (2-2)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} M_{20} &= 1/3 \cdot (1 - 3 \sin^2 \varphi) & \varphi &= 90^\circ - \Theta \\ M_{21} &= \sin 2\varphi \\ M_{22} &= \cos^2 \varphi \\ M_{30} &= 1/3 \cdot (3 \sin \varphi - 5 \sin^3 \varphi) \\ M_{31} &= 1/2 \cdot \cos \varphi \cdot (1 - 5 \sin^2 \varphi) \\ M_{32} &= 5 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ M_{33} &= \cos^3 \varphi \\ N_{20} &= (C/R)^3 \cdot (1 - 3 \sin^2 \delta) \\ N_{21} &= (C/R)^3 \cdot \sin 2\delta \cdot \cos(\tau_G - \lambda) \\ N_{22} &= (C/R)^3 \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos 2(\tau_G - \lambda) \\ N_{30} &= r_0/C \cdot (C/R)^4 \cdot \sin \delta \cdot (3 - 5 \sin^2 \delta) \\ N_{31} &= r_0/C \cdot (C/R)^4 \cdot \cos \delta \cdot (1 - 5 \sin^2 \delta) \cdot \cos(\tau_G - \lambda) \\ N_{32} &= r_0/C \cdot (C/R)^4 \cdot \sin \delta \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos 2(\tau_G - \lambda) \\ N_{33} &= 5/6 \cdot r_0/C \cdot (C/R)^4 \cdot \cos \delta \cdot \cos 3(\tau_G - \lambda) \end{aligned} \quad (2-3)$$

- $G_m, G_s$ : Doodson-ova konstanta za utjecaj Mjeseca, odnosno Sunca  
 $r$ : radijus vektor promatrane točke na površini Zemlje  
 $r_0$ : srednji polumjer Zemlje  
 $\varphi$ : geocentrična širina točke na površini Zemlje  
 $\delta$ : deklinacija Mjeseca, odnosno Sunca  
 $\tau_G$ : Greenwich-ko zvjezdano vrijeme  
 $C$ : srednja udaljenost Mjeseca, odnosno Sunca  
 $R$ : udaljenost težišta Mjeseca, odnosno Sunca od težišta Zemlje  
 $\lambda$ : elipsoidna dužina točke na površini Zemlje.

U svrhu računanja utjecaja Zemljinih plimnih valova na osnovne geodetske radove potreban je tenzor deformacija prouzrokovan Zemljinim plimnim valovima (v. [2] str. 9-10):

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{\partial S_r}{\partial r} = \frac{\partial ((h/g) \cdot W_n)}{\partial r} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dh}{dr} \cdot W_n + \frac{h}{g} \cdot \frac{n}{r} \cdot W_n = \frac{W_n}{g} \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{dh}{dr} + \frac{n \cdot h}{r} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\Theta\Theta} &= (1/r) \cdot \frac{\partial S_{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{S_r}{r} = (1/r) \cdot \frac{\partial \left[ (1/g) \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \Theta} \right]}{\partial \Theta} + \frac{h}{r \cdot g} \cdot W_n = \\
&= (1/r) \cdot (1/g) \cdot \frac{\partial^2 W_n}{\partial \Theta^2} + \frac{h}{r \cdot g} \cdot W_n \\
T_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{r \sin \Theta} \cdot \frac{1}{g \sin \Theta} \cdot \frac{\partial^2 W_n}{\partial \lambda^2} + \frac{h}{r \cdot g} \cdot W_n + (1/r) \cdot \cot \Theta \cdot (1/g) \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \Theta} \\
T_{r\Theta} &= 1/2 \cdot \left[ (1/r) \cdot \frac{\partial S_r}{\partial \Theta} + \frac{\partial S_{\Theta}}{\partial r} - \frac{S_{\Theta}}{r} \right] = 1/2 \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{h}{g} \cdot \frac{W_n}{\partial C} + \frac{dl}{dr} \cdot \frac{W_n}{g \partial \Theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{g} \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \Theta} - \frac{1}{r \cdot g} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \Theta} \right] \quad (2-4) \\
T_{\Theta\lambda} &= \frac{1}{r g \sin \Theta} \cdot \frac{\partial^2 W_n}{\partial \Theta \partial \lambda} - \frac{1}{r \cdot g} \cdot \frac{\cot \Theta}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \lambda} \\
T_{r\lambda} &= 1/2 \cdot \left[ \frac{1}{r \sin \Theta} \cdot \frac{h}{g} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \lambda} + \frac{dl}{dr} \cdot \frac{1}{g \sin \Theta} \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \lambda} + \frac{1}{g r \sin \Theta} \cdot \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial W_n}{\partial \lambda} \cdot (n - 1) \right]
\end{aligned}$$

Računanje komponenta tenzora u (2—4) zahtjeva poznavanje slijedećih parcijalnih derivacija jednačbe (2—2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n}{\partial \Theta} &= G_m \cdot \sum_{i=2}^2 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot N_{ij} \cdot \frac{\partial M_{ij}}{\partial \Theta} \\
\frac{\partial W_n}{\partial \lambda} &= G_m \cdot \sum_{i=2}^3 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot M_{ij} \cdot \frac{\partial N_{ij}}{\partial \lambda} \\
\frac{\partial^2 W_n}{\partial \Theta \partial \lambda} &= G_m \cdot \sum_{i=2}^3 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot {}_m M_{ij} \cdot \frac{\partial N_{ij}}{\partial \lambda} \\
\frac{\partial^2 W_n}{\partial \Theta^2} &= G_m \cdot \sum_{i=2}^3 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot N_{ij} \cdot \frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial \Theta^2} \\
\frac{\partial^2 W_n}{\partial \lambda^2} &= G_m \cdot \sum_{i=2}^3 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot M_{ij} \cdot \frac{\partial^2 N_{ij}}{\partial \lambda^2} \\
r &= \frac{a}{1 + e^2 \cos^2 \Theta} + H \quad (H - \text{nadmorska visina})
\end{aligned} \quad (2-5)$$

Parcijalne derivacije  $\frac{\partial M_{ij}}{\partial \Theta}$ ,  $\frac{\partial N_{ij}}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial \Theta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 N_{ij}}{\partial \lambda^2}$  lako se dobiju deriviranjem izraza (2—3).

### 3. UTJECAJ DEFORMACIJE ZEMLJE PROUZROKOVANE ZEMLJINIM PLIMNIM VALOVIMA NA TRILATERACIJU

Deformacija duljine u bilo kojem smjeru  $\Delta n$  lako se dobije koristeći izraze (2—4)

$$\Delta n = \alpha_1^2 T_{rr} + \alpha_2^2 T_{\theta\theta} + \alpha_3^2 T_{\lambda\lambda} + \alpha_1 \alpha_2 T_{r\theta} + \alpha_2 \alpha_3 T_{\theta\lambda} + \alpha_3 \alpha_1 T_{\lambda r} \quad (3-1)$$

gdje su  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  kosinusi kutova koje zatvara duljina s koordinatnim osima (u smislu jednadžbi (2—1)).

Pošto su duljine u trilateracijskim mrežama približno horizontalne (trilateracija I i II reda) razmotrimo deformaciju u horizontalnoj ravnini. Tada je:

$$T_{r\theta} = T_{r\lambda} = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3^2 = 1 - \alpha_2^2,$$

te izraz (3—1) prelazi u

$$\Delta n = \alpha_2^2 T_{\theta\theta} + (1 - \alpha_2^2) \cdot T_{\lambda\lambda} + \alpha_2 \alpha_3 T_{\theta\lambda} \quad (3-2)$$

Na osnovu numeričkih ispitivanja za područje Zagreba deformacija duljina prouzrokovana Zemljinim plimnim valovima iznosi od  $-0,5 \cdot 10^{-7}$  do  $+0,5 \cdot 10^{-7}$ . Ona je sistematskog karaktera, te duljina od 400 km (npr. Zagreb — Beograd) mogu se vremenski mjenjati u intervalu od 2 cm.

### 4. UTJECAJ DEFORMACIJE ZEMLJE PROUZROKOVANE ZEMLJINIM PLIMNIM VALOVIMA NA MJERENE KUTEVE U TRIANGULACIJI

Svedimo ovaj problem na razmatranje deformacija duljina, odnosno primjenom poznatih relacija iz trigonometrije:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\operatorname{tg} \alpha/2 = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{s \cdot (s-a)}} \quad (4-1)$$

gdje je:

$$s = (a + b + c)/2,$$

mogu se izračunati kutevi kao vremenske funkcije deformiranih duljina.

Poistovjećivanjem deformacija duljina uslijed elastičnosti Zemlje i gravitacijskog djelovanja Mjeseca i Sunca sa srednjim pogreškama duljina iz (4—1) dobije se

$$m_{\alpha}'' = \pm \rho'' \sqrt{\left[ \frac{a}{bc \sin \alpha} \right]^2 m_a^2 + \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2b^2 c \sin \alpha} m_b^2 + \left[ \frac{b - (a^2 + c^2)}{2bc^2 \sin \alpha} \right] m_c^2} \quad (4-2)$$

Ako je  $a = b = c = 100$  km,  $\alpha = 60^\circ$  i  $m_a = m_b = m_c = 5 \cdot 10^{-7}$  (što je često očekivani iznos deformacije) biti će

$$m_{\alpha}'' = \pm 0''.069$$



Promjena kuta uslijed deformacije duljina dobije se deriviranjem prvog izraza u (4—1)

$$d\alpha'' = \rho'' \left[ \frac{a}{bc \sin \alpha} \right] da + \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2b^2 c^2 \sin \alpha} db + \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{2bc^2 \sin \alpha} dc \quad (4.3)$$

Deformacija kuta u trokutu ovisi o neravnomjernoj deformaciji strana, koje obično zatvaraju kut od cca 60°. Duljine koje zatvaraju kut od 60° najčešće imaju deformacije suprotnog predznaka, i za  $da = db = dc = 5 \cdot 10^{-7}$ ,  $a = b = c = 100$  km i  $\alpha = 60^\circ$  iz (4—3) dobije se

$$d\alpha'' = 0''.012$$

Treba napomenuti da i vremenska promjea otklona težišnice ima utjecaja i na mjerenja horizontalnih kuteva. Pogreška mjerenja horizontalnog kuta uslijed vremenskog hoda težišnice slično se manifestira kao i utjecaj nevertikalnosti vertikalne osi teodolita. Može se već sada konstatirati da je to manje više teorijski problem, pošto se još uvijek ne mogu konstruirati tako savršene alhidadne libele ili kompenzatori, da bi vremenski hod otklona težišnice imao praktično značenje na mjerenja horizontalnih kuteva.

## 5. UTJECAJ PROMJENE UBRZANJA SILE TEŽE NA VISINSKE POMAKE POVRŠINE ZEMLJE

Zemlja je elastično tijelo, te promjenom ubrzanja sile teže (npr. zbog gravitacijskog djelovanja Mjeseca i Sunca) pomjeraju se točke i u visinskom smislu kako na površini tako i u unutrašnjosti Zemlje. Drugim riječima podliježu promjenama visine geodetskih točaka (repera). Osim toga, horizontalne promjene komponenata ubrzanja sile teže prouzrokuju vremenski hod otklona težišnice, samim tim vremenski mijenja svoj položaj u prostoru horizontalna ravnina položena kroz vizurnu os nivelira, a to ima za posljedicu da su mjerene visinske razlike funkcije vremena. Ovaj utjecaj dobro je obrađen u literaturi i računa se po izrazu

$$(\Delta h) \text{ mm} = k \cdot S \cdot \sin 2z \cdot \cos A; \quad (5-1)$$

gdje je  $k = 0.068$  za Mjesec a  $0.032$  za Sunce;  $z$  je zenitna daljina nebeskog tijela,  $A = (A_1 - A_0)$ , gdje je  $A_1$  azimut nivelirane strane  $S$ ,  $A_0$  azimut nebeskog tijela,  $S$  duljina strane niveliranja gdje se ne mijenja azimut.

### 5.1. Utjecaj deformacije Zemlje zbog Zemljinih plimnih valova na prijenos visine kroz vertikalno okno

Iz (3—1) sa  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , dobije se izraz za vertikalnu deformaciju

$$\Delta v = \alpha_1^2 \cdot T_{rr} \quad (5-2)$$

Na osnovu numeričkih ispitivanja za područje Zagreba ova deformacija kreće se u granicama od  $\pm 0.5 \cdot 10^{-7}$ , a to znači da je visinska razlika od cca 1 km

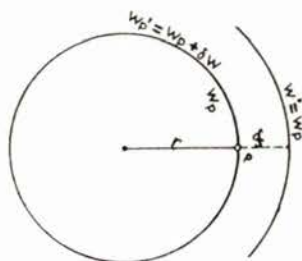
podložna vremenskim promjenama od cca 0.1 mm. Poznavajući točnost današnjeg prenosa visina kroz vertikalno okno može se zaključiti, da deformacija Zemlje po vertikali radi gravitacijskih djelovanja Mjeseca i Sunca nema nekog praktičnog značenja.

### 5.2. Vertikalno pomjeranje točaka na površii Zemlje zbog promjene polja ubrzanja sile teže, odnosno Zemljinih plimnih valova

Vertikalno pomjeranje točaka kao posljedicu promjene ubrzanja sile teže razmatrao je vrlo detaljno Biro u [3]. Međutim autor u [3] kod obrade ovog problema uzima u obzir samo gravitacijsku komponentu ubrzanja sile zemljine teže. Ovdje je ta pojava razmatrana šire uvođenjem centrifugalne sile (pošto Zemlja rotira) i potencijala Zemljinih plimnih valova radi stalnog gravitacijskog djelovanja Mjeseca i Sunca, a korištene su namjerno iste oznake kao u [3] da bi se lakše uvidjele razlike u fizikalnim modelima. Jednostavnosti radi aproksimirajmo Zemlju prvo čvrstom kuglom, a kasnije elastičnim tijelom.

#### 5.2.1. Pomak nivo ploha kao vremenska funkcija promjene ubrzanja sile teže čvrste Zemlje

Na čvrstoj Zemlji aproksimiranoj kuglom izabere se točka P (v. sl. 1), koja ima ukupni potencijal ubrzanja sile teže



$$W_P = W_g + W_c + W_d \quad (5-3)$$

gdje je:

$W_g$  — potencijal sile privlačenja

$W_c$  — potencijal centrifugalne sile

$W_d$  = potencijal Zemljinih plimnih valova.

Matematički predočeni potencijali izgledaju ovako:

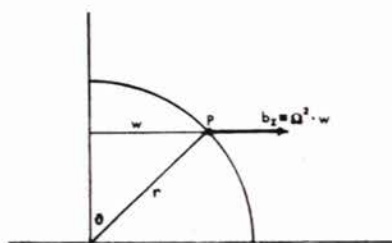
$$W_g = -fM/r$$

$$W_c = -1/2 \Omega^2 w^2 \quad (5-4)$$

$$W_d = -G \sum_{i=2}^3 \cdot \sum_{j=0}^i \cdot (r/r_0)^i \cdot M_{ij} \cdot N_{ij}$$

gdje je:

- $f$  — gravitacijska konstanta
- $M$  — masa Zemlje
- $fM$  — geocentrična gravitacijska konstanta
- $r$  — polumjer Zemlje
- $\Omega$  — kutna brzina rotacije Zemlje
- $w$  — najkraća udaljenost točke P od osi rotacije Zemlje (v. sl. 2)



Sl. 2.

Iz (5-3) i (5-4) deriviranjem dobije se:

$$g_r = -\frac{\partial W_P}{\partial r} \quad \text{ili} \quad g = \frac{\partial W_P}{\partial r} \quad (5-5)$$

$$g_r = -f \cdot M/r^2 + \Omega^2 r \sin^2 \Theta + (i/r) \cdot W_d$$

a ubrzanje sile zemljine teže  $g = -g_r$

$$g = fM/r^2 - \Omega^2 r \sin^2 \Theta - (i/r) \cdot W_d \quad (5-6)$$

Ukoliko se mijenja polje ubrzanja sile teže za konačnu veličinu (npr. zbog Zemljinih plimnih valova) tada potencijal u točki P poprima veličinu

$$W'_p = W_p + \delta W$$

i sa linearnom aproksimacijom

$$W'_p = W_p + g' \cdot \delta s \approx W_p + g \cdot \delta s$$

gdje je  $g'$  odnosno  $g$  ubrzanje sile teže u novom odnosno starom stanju, a  $\delta s$  udaljenost nivo plohe  $W = W'_p$  od točke P na površini Zemlje. Zapravo  $\delta s$  je vertikalni pomak početne nivo plohe iz točke P kao posljedica promjene ubrzanja sile teže, tj.

$$\delta s = \delta W/g' \quad \text{ili} \quad \delta s = \delta W/g \quad (5-7)$$

Veličine  $g$  i  $g'$  razlikuju se za male vrijednosti te se  $g'$  može zamjeniti sa  $g$  ili sa srednjom vrijednosti  $(g' + g)/2$ .

Pošto se promjena potencijala  $\delta W$  ne može mjeriti, da bi se izračunao vertikalni pomak  $\delta s$  neophodno je  $\delta W$  izraziti kao funkciju promjene ubrzanja sile teže

$$dW = -g \cdot dr \quad (5-8)$$

Deriviranjem (5—6) dobije se

$$\frac{dg}{dr} = -2 \cdot \frac{fM}{r} - \Omega^2 \sin^2 \Theta + \frac{i(1-i)}{r^2} \cdot W_d \quad (5-9)$$

i odatle

$$dr = \frac{r^3}{-2fM - \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta + i(1-i)r \cdot W_d} \cdot dg \quad (5-10)$$

Uvrsti li se (5—10) u (5—8) dobit će se

$$dW = \frac{g \cdot r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \quad (5-11)$$

i sa (5-7)

$$\delta s = \frac{\delta W}{g} = \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot dg \quad (5-12)$$

*Primjer:* Izračunati pomak nivo plohe za čvrstu Zemlju ako se promjeni ubrzanje sile teže zbog Zemljinih plimnih valova ( $g = 2 \cdot 10^{-7} \cdot g$ )

$$\begin{aligned} r &= 6\,371\,023.52 \text{ m} \\ fM &= 398\,600 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \\ \Omega &= 7.292\,115\,08 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ W_d &= 2.627\,724 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ \Theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

Sa prethodnim brojčanim vrijednostima i iz (5—12) izračuna se

$$\delta s = 0.63813 \text{ m}$$

Usporedbe radi kasnija računanja pokazuju da su pomjeranja nivo ploha za elastičnu Zemlju veća

$$\delta s_{el} = 0.96368 \text{ m}$$

Ako se u modelu zanemari centrifugalna sila dobit će se u ovom primjeru nešto veće pomjeranje nivo plohe

$$\delta s = 0.63923 \text{ m}$$

Drugim riječima uvođenjem centrifugalne sile i Zemljinih plimnih valova u (5—12) fizikalni model je potpuniji i odgovara više stvarnosti.

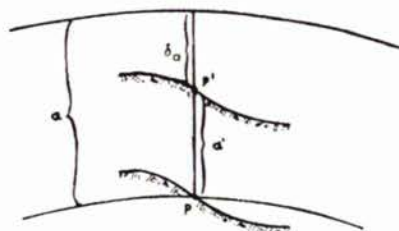


Međutim, vremenske promjene nivo ploha odnosno geoida računane po ovom modelu i modelu od Biro-a [2], uslijed gravitacijskih djelovanja Mjeseca i Sunca na Zemlju, razlikuju se za cca 1—1.5 mm za čvrstu i 1—3 mm za elastičnu Zemlju, te u praktičnom smislu, bar za sada, nemaju neku osobitu važnost.

### 5.2.2. Promjena apsolutnih visina točaka na elastičnoj Zemlji

U stvarnosti Zemlja nije kruto tijelo te točke na površini Zemlje mijenjaju svoj položaj prilikom promjene ubrzanja sile teže. Ako se iz bilo kojeg razloga mijenja potencijal sile teže u točki P (v. sl. 3) za vrijednost  $\delta W$  onda nivo ploha koja prolazi točkom P pomakne se u položaj gdje promjenjeno polje ubrzanja sile teže ima potencijal  $W' = W_p$ . Navedeni pomak označimo sa  $a$ .

Uslijed ograničene elastičnosti Zemlje točka P promjenom potencijala  $\delta W$  neće u potpunosti slijediti nivo plohu te će promijeniti položaj za veličinu  $a'$  (v. sl. 3).



Razlika  $\delta a = a - a'$  je relativni pomak nivo plohe u odnosu na izmjenjeni položaj točke P na površini deformirane Zemlje. Iz razlike potencijala može se indirektno dobiti taj pomak:

$$\delta W_p' = W_p' - W_p = g' \cdot \delta a \quad (5-13)$$

$$\delta a = \delta W_p' / g'$$

Uvede li se aproksimacija  $g' = g$  iz (5—11) i (5—13) dobit će se

$$\delta a = (g/g') \cdot \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot dg_p' \quad (5-14)$$

gdje je  $\delta a$  pozitivno u smjeru radius vektora.

Jednadžbe (5—14) i (5—12) mada su slične po obliku nisu identične.

Uvođenjem Loveovih brojeva  $h$  i  $k$ , koji karakteriziraju elastična svojstva Zemlje, dobije se odnos vertikalnog pomaka površine Zemlje i pomaka nivo plohe čvrste Zemlje

$$h = a' / \delta s$$

Shodno izrazima (5-7) i (5-11) imamo

$$a' = h \cdot \delta s = h \cdot \delta W/g$$

$$a' = h \cdot \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot dg \quad (5-15)$$

Pošto je dg promjena ubrzanja sile teže čvrste Zemlje koja se ne može mjeriti (Zemlja je elastično tijelo), uvodi se gravimetrijski faktor  $G'$ , tj.:

$$dg = dg_{P'}/G' \quad (5-16)$$

gdje je

$$G' = 1 + h - (3/2)k. \quad (\text{v. [7] str. 69})$$

Supstitucijom dg u (5-15) sa (5-16) dobit će se

$$a' = (h/G') \cdot \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot dg_{P'} = (h/G') \cdot \delta a \quad (5-17)$$

gdje je  $a'$  pozitivno u smjeru radius vektora točke P (prema vani).

Konačno možemo izračunati apsolutni pomak nivo plohe elastične Zemlje:

$$\begin{aligned} a &= a' + \delta a = (h/G') \cdot \delta a + \delta a = (1 + h/G') \delta a = \\ &= (1 + h/G') \cdot \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot \delta g_{P'}, \end{aligned} \quad (5-18)$$

Za istraživanje recentnih vertikalnih gibanja obično se računaju razlike apsolutnih pomaka dvije točke Zemljine plohe, (npr. P i Q) te na osnovu (5-17) i (5-18) imamo

$$a'_P - a'_Q = \delta a'_{Q'} = \frac{h}{G'} \cdot \frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}) \quad (5-19)$$

Iz (5-19) nije teško zaključiti da je vertikalna promjena apsolutnih pomaka točaka P i Q posljedica različitih promjena ubrzanja u tim točkama ( $\delta g_{P'}$  —  $\delta g_{Q'}$ ).

Izraz ( $\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}$ ) da se napisati i u obliku:

$$\delta g_{P'} - \delta g_{Q'} = g_P - g_Q - (g_{P'} - g_{Q'}) = \delta g_Q^P - \delta g_{Q'}^{P'} = \Delta (\delta g)_Q^P \quad (5-10)$$

Praktički značaj razlike  $a'_P - a'_Q$  potvrdit će slijedeći primjer. Neka je promjena ubrzanja sile teže između točaka P i Q samo 0.02 mgal, tj. ( $\delta g$ ) =  $0.02 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ .

Tada je razlika apsolutnih pomaka točaka (P i Q) shodno (5-19) (sa  $h = 0.602$ ,  $G' = 1.17$ ) jednaka

$$a'_P - a'_Q = 3.32 \text{ cm,}$$

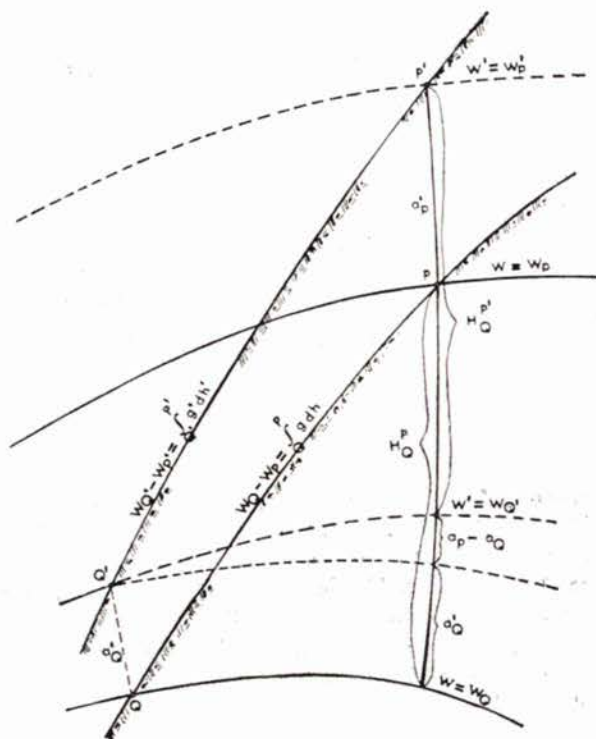
a za  $(\delta g)_Q^P = 0.01 \text{ mgal}$

$$a'_P - a'_Q = 1.66 \text{ cm.}$$

Upoređujući prethodne veličine (3.32 cm ili 1.66 cm) sa srednjom pogreškom nivelmana visoke točnosti, zaključuje se da se promjena ubrzanja sile teže od svega 0.01 mgal ne može zanemariti.

### 5.2.3. Utjecaj promjena ubrzanja sile teže na visinske razlike

Točke P i Q na fizičkoj površini Zemlje, uslijed promjene ubrzanja sile teže, pomaknu se u točke P' i Q' i početna visinska razlika  $H_Q^P$  promjeni se u novu visinsku razliku  $H_{Q'}^{P'}$ , sl. 4.



Na osnovu sl. 3 i 4. promjena visinske razlike iznosi

$$\delta H_Q^P = H_{Q'}^{P'} - H_Q^P = a_{P'} - a_{Q'} - (a_P - a_Q) \quad (5-21)$$

Iz (5—21) zaključuje se da promjena visinske razlike ne sadrži samo razliku apsolutnih pomaka ( $a_{P'} - a_{Q'}$ ) točaka nego i razliku ( $a_P - a_Q$ ) apsolutnih pomaka nivo ploha.

Za gravimetrijsko određivanje promjene ubrzanja sile teže (5—21) da se preurediti

$$\delta H_Q^p = a_Q - a_{Q'} - (a_P - a_{P'}) = -(\delta a_P - \delta a_Q)$$

Uvede li se u prethodnu jednadžbu (5—13) za točku P odnosno Q dobije se:

$$\begin{aligned} \delta H_Q^p &= H_{Q'}^p - H_Q^p = -(\delta a_P - \delta a_Q) = \\ &= -\frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}) \\ &= -\frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot \Delta(\delta g)_Q^p \end{aligned} \quad (5-22)$$

Izraz (5—22) pokazuje da se promjene izniveliranih visinskih razlika mogu odrediti iz promjena ubrzanja sile teže, ali samo pod pretpostavkom da su vertikalna pomjeranja fizičke površine Zemlje isključivo posljedica promjene ubrzanja sile teže. Važnost iznesenih konstatacija najbolje pokazuje slijedeći brojčani primjer.

Neka je  $\Delta(\delta g)_Q^p = 0.02$  mgal. (5—22) dobije se

$$\begin{aligned} \delta H_Q^p &= -\frac{r^3}{2fM + \Omega^2 r^3 \sin^2 \Theta - i(1-i)r \cdot W_d} \cdot (\delta g)_Q^p \\ &= -6.505 \text{ cm} \quad \text{ili sa } \Delta(\delta g)_Q^p = 0.01 \text{ mgal:} \\ &= -3.253 \text{ cm} \end{aligned}$$

Usporedbom veličine  $a_{P'} - a_{Q'} \approx 3.32$  cm koja pokazuje razliku apsolutnih vertikalnih pomaka točki P i Q sa promjenom visinske razlike istih točaka  $\delta H_Q = -6.505$  cm, zaključuje se da je u apsolutnom smislu promjena visinske razlike cca 2 puta veća. To je sasvim razumljivo pošto promjena visinske razlike sadrži razliku apsolutnih pomaka točaka i nivo ploha.

Ukoliko se osim mjerenja promjene ubrzanja sile teže ponovno niveliraju i visinske razlike točaka, tad se mogu promjene visinske razlike odrediti i iz promjene potencijala

$$\delta W = \int_P^Q \delta(\Delta h) \cdot g + \int_P^Q \delta(\Delta g) \cdot \Delta h \quad (5-23)$$

Ukoliko bi iz (5—22) i (5—23) dobili iste vrijednosti značilo bi da je fizikalni model u (5—22) dobro odabran. Međutim, ako bi promjena nivelirane visinske razlike iz (5—22) i (5—23) odudarala jedna od druge, značilo bi da osim



elastičnih deformacija čiji je uzrok bio promjena potencijala sile zemljine teže, postoje i drugi neelastični vertikalni pomaci tzv. recentna vertikalna pomjeranja Zemljine kore.

Ovdje je još bitno napomenuti, da se razlike mogu pojaviti i kad smo dobro odabrali fizički model ukoliko se Loveovi brojevi  $h$  i  $k$  koji su uzeti u računanje ne odgovaraju stvarnoj vrijednosti za naš promatrani dio Zemljine površine. Kako je poznato za naše područje nema mjerenjem određenih Love-ovih brojeva  $h$  i  $k$  te se to nameće kao jedan od zadataka u narednom periodu.

## 6. ZAKLJUČAK

Iz obrade ovog problema može se zaključiti da će promjena ubrzanja sile teže zbog gravitacijskog djelovanja Mjeseca i Sunca i elastičnosti Zemlje imati veliko značenje kada se parametri u geodeziji budu mogli mjeriti s točnošću od  $10^{-7}$ . Osim toga, naglašena je važnost mjerenja ubrzanja sile teže duž nivelmanskih vlakova. Ne samo da se iz tih mjerenja dobiva razlika potencijala ubrzanja sile teže ili metričke visinske razlike, nego se također određuju razlike vertikalnih pomaka točaka fizičke površine Zemlje kao posljedica promjene ubrzanja sile teže.

*Slobodno se može konstatirati da se bez mjerenja ubrzanja sile teže ne mogu odrediti, odnosno studioznije razmatrati vertikalni pomaci Zemljine površine.*

U našoj zemlji privodi se kraju obrada II NVT, a samim tim nameće se pitanje visinskog sustava. Poznato je da duž svih nivelmanskih vlakova nemamo mjerenih vrijednosti ubrzanja sile teže ili da se mjerene vrijednosti ubrzanja sile teže odnose na drugu vremensku epohu u odnosu na nivelmanske podatke. Zbog toga mogle bi se samo koristiti karte anomalija ubrzanja sile teže za *aproksimaciju* određenog visinskog sustava, ali nikako za studioznije razmatranje vertikalnih pomaka Zemljine površine.

Na koncu zahvaljujem se Republičkoj zajednici za znanstveni rad SRH koja je sufinancirala ovaj rad.

## LITERATURA:

- [1] Bilajbegović, A.: Die theoretischen Mondgezeiten und ihre Genauigkeit mit Anwendung auf die geodätischen Abstandsmessungen zum Mond. DGK Reihe C, Heft Nr 248. München 1978.
- [2] Bilajbegović, A.: Utjecaj vremenskih deformacija Zemlje, uzrokovanih gravitacionim silama Mjeseca i Sunca, na osnovne geodetske radove. Zbornik radova Geodetskog fakulteta Niz A, Svezak br. 24. Zagreb 1980.
- [3] Biro, P.: Einfluss von zeitlichen Änderungen des Erdschwerfeldes auf die Höhe von Nivellements festpunkten. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretischen Geodäsie der Universität Bonn Nr 12. Bonn 1973.
- [4] Heck, B.: Zur Bstimmung vertikaler rezenter Erdkrustenbewegungen und zeitlichr Änderungen des Schweremessungen und Nivellements. DGK Reihe C, Heft Nr. 302. München 1984.
- [5] Kertz, W.: Einführung in die Geophysik I. Band 1, Erdkörper. Bibliographisches Institut, Band 275. Mannheim 1969.

- [6] Lichtenegger, H.: Teoretische Untersuchungen und praktische Ergebnisse von Erdzeitenregistrierungen im Grazer Raum. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 45. Graz 1983.
- [7] Klak, S.: Geofizika. Zagreb 1984.
- [8] Klak, S.: Gravimetrija. Zagreb 1974.
- [9] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure. Bibliographisches Institut, Hochshultaschenbücher, Band 197. Mannheim 1966.
- [10] Melchior, P.: The Tides of the Planet Earth. Pergamon press Oxford — New York — Toronto — Sydney — Paris — Frankfurt 1978.
- [11] Wenzel, H. G.: Zur Genauigkeit von gravimetrischen Erdzeitenbeobachtungen. Disertacija Hannover 1976.

### SAŽETAK

Gravitacijske sile Mjeseca i Sunca te elastičnost Zemlje uzrokuju njene vremenske deformacije, a samim tim i prostorne pomake geodetskih točaka. U ovom radu analiziran je utjecaj spomenutih deformacija na geodetske radove visoke točnosti, kao i utjecaj promjene ubrzanja sile teže na vertikalne pomake, odnosno visinske razlike.

### ZUSAMMENFASUNG

Die begrenzt elastische Erdkörper wird durch die Gezeiten deformiert. Die Deformation des Erdkörpers wegen der Gezeiten verursachen die räumliche Bewegungen der geodätischen Punkte. Dieser Einfluss auf die gründlichen geodätischen Arbeiten wird gesonderd untersucht.

Primljeno: 1988-01-18