

## PRILOG OCJENI TOČNOSTI MJERENIH KUTEVA U SVIM KOMBINACIJAMA

Ladislav FEIL, Nevio ROŽIĆ — Zagreb\*

Suvremeni geodetski instrumenti rijetko su konstruirani za direktno mjerenje kuteva. Teodolitima se direktno mjere pravci, dok se kutevi nalaze indirektno, razlikom pravaca.

Schreiberov postupak mjerenja kuteva u svim kombinacijama međutim, koristi se još i danas, naročito pri mjerenjima visoke točnosti. Ovom metodom mjerit će se samo kut između para pravaca koji su optimalno vidljivi. Naravno na svakom stajalištu, mjere se svi kutevi između mogućih kombinacija pravaca.

Pojedina stajališta imaju različiti broj pravaca, pa time i različiti broj mogućih kombinacija pravaca. Da bi težine svih pravaca odnosno kuteva bile jednake na svim stajalištima, (čime se pojednostavljuje daljnji postupak izjednačenja) još je Schreiber predložio da se na stajalištima s manjim brojem pravaca obavi veći broj ponavljanja i obrnuto na stajalištima s većim brojem pravaca manji broj ponavljanja.

Općenito je dakle, svaki kut mjeren u više ponavljanja i to tako da je broj ponavljanja isti za sve kuteve.

Prije staničnog izjednačenja na osnovu mjerenih vrijednosti pojedinih kuteva računaju se obične aritmetičke sredine, koje se često nazivaju fiktivne vrijednosti mjerenih kuteva. U daljnjem postupku smatraju se »mjerenim« veličinama.

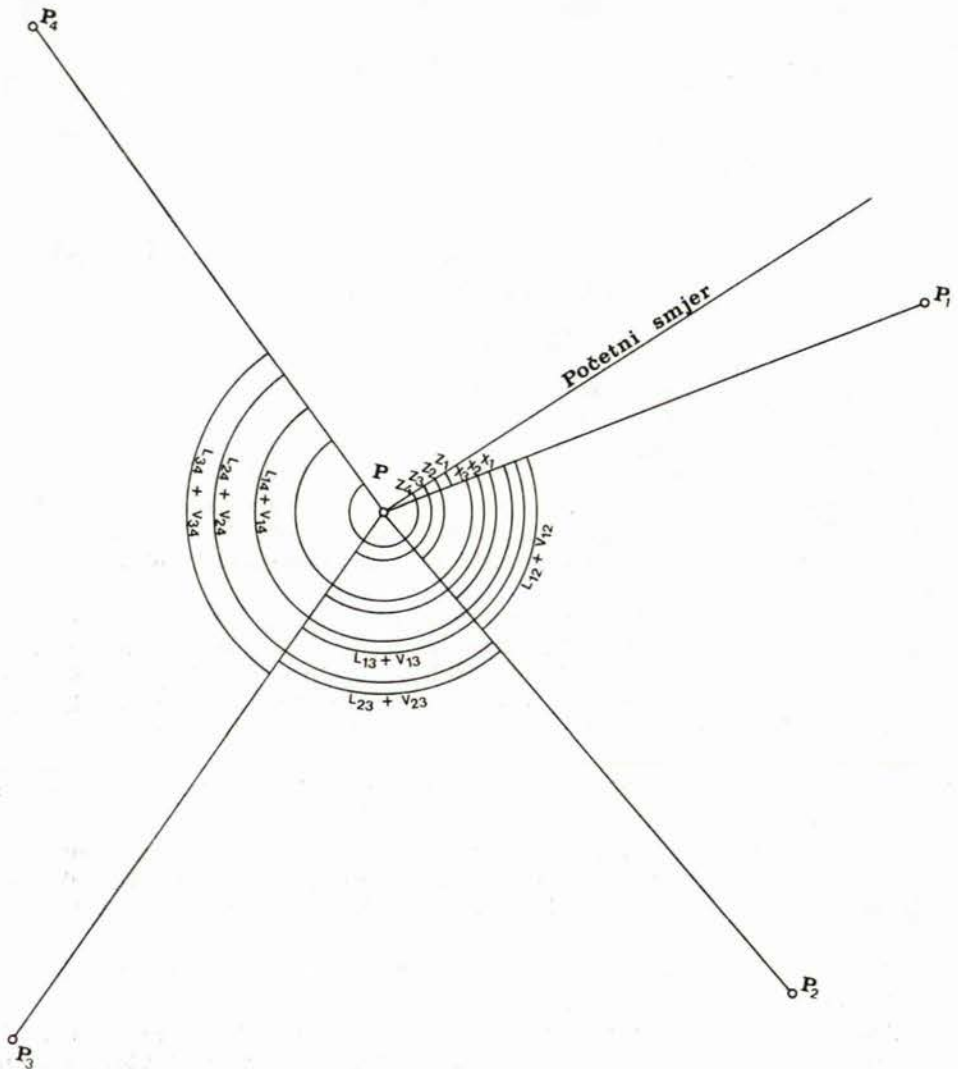
Stanično izjednačavanje kuteva mjerenih u svim kombinacijama može se izvesti na dva načina.

Ako se izjednačenjem određuju najvjerojatnije vrijednosti pravaca  $z_i$ , sl. 1, odgovarajuća matrica kovarijance bit će singularna, a izjednačene vrijednosti pravaca bit će međusobno korelirane veličine. Moguće je međutim, odgovarajućim transformacijama, dobiti takvu matricu kovarijance da sve izjednačene vrijednosti pravaca budu međusobno nezavisne (vidi [1]). Drugim riječima, prvotna matrica kovarijance  $C$  može se zamijeniti dijagonalnom matricom  $C'$  čiji su elementi općenito

$$c'_{ii} = \frac{2}{s}, \quad (1)$$

gdje je:  $s$  broj pravaca na stajalištu.

\* Adresa autora: Doc. dr Ladislav Feil i Nevio Rožić, dipl. inž. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.



Slika 1. Kutevi mjereni u svim kombinacijama

Izjednačenjem, također se mogu odrediti najvjerojatnije vrijednosti kuteva  $x_i$ , sl. 1. Odgovarajuća matrica kovarijance bit će regularna (nesingularna), ali će izjednačene vrijednosti kuteva biti međusobno korelirane veličine. Matrica kovarijance u ovom slučaju je

$$K = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Najvjerojatnije vrijednosti kuteva bit će dakle opće aritmetičke sredine, računane iz fiktivnih vrijednosti mjerenih kuteva.

Isti numerički rezultati najvjerojatnijih vrijednosti dobit će se ako se izjednačuju kutevi odnosno pravci, time da se razlikom najvjerojatnijih vrijednosti pravaca odrede kutevi. Prednost izjednačenja po pravcima je u tome, što daje međusobno nezavisne vrijednosti izjednačenih pravaca. Zbog toga se često primjenjuje najjednostavnije rješenje, da se izjednačuju kutevi, ali se definitivni rezultati izraze pomoću najvjerojatnijih vrijednosti pravaca. U slučaju da se početni smjer poklapa s prvim pravcem dobit će se slijedeći rezultati:

Korelirani kutevi	Nezavisni pravci	
	$z_1 = 0$	
$x_1$	$z_2 = x_1$	
$x_2$	$z_3 = x_2$	(3)
$x_3$	$z_4 = x_3$	

Kao i samo izjednačenje i ocjena točnosti se uobičajeno provodi na osnovu fiktivnih vrijednosti mjerenih kuteva. Popravke se računaju razlikom najvjerojatnijih i fiktivnih vrijednosti mjerenih kuteva (vidi [2], [4], [7]). Ovim se postupkom praktično znatno smanjuje obim računanja.

Danas međutim kada su na raspolaganju suvremeni kompjuteri veći obim računanja nije više prepreka. Zbog toga, treba koristiti postupak ocjene točnosti na osnovu izvornih mjerenja. Takav postupak između ostalog predlaže i [6].

Prema tome, mogu se računati sve potrebne srednje pogreške za ocjenu točnosti:

— Srednja pogreška jedinice težine

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{2 v^t v}{(s-1)(ns-2)}} \quad (4)$$

— Srednja pogreška mjerenog kuta

$$m_j = \pm \frac{m_0}{\sqrt{l}} \quad (5)$$

— Srednja pogreška kuta računatog iz n ponavljanja (fiktivne vrijednosti mjerenog kuta)

$$m'_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{2 v^t v}{n(s-1)(ns-2)}} \quad (6)$$

— Srednja pogreška izjednačenog kuta

$$\bar{m}_k = \pm \frac{m_0}{\sqrt{\frac{ns}{2}}} = \pm 2 \sqrt{\frac{v^t v}{ns(s-1)(ns-2)}} \quad (7)$$

— Srednja pogreška izjednačenog pravca

$$\bar{m}_p = \pm \frac{m_0}{\sqrt{ns}} = \pm \sqrt{\frac{2 v^t v}{ns(s-1)(ns-2)}} \quad (8)$$

Srednja pogreška jedinice težine, može se računati i na osnovu fiktivnih popravaka  $v'$  (razlika između najvjerovatnijih vrijednosti kuteva i fiktivnih vrijednosti mjerenih kuteva), tj.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{2 n v^t v'}{(s-1)(s-2)}} \quad (9)$$

Razlike  $d$  između fiktivnih vrijednosti mjerenih kuteva i samih mjerenja, također mogu poslužiti za računanje srednje pogreške jedinice težine, tj.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{2 d^t d}{s(s-1)(s-2)}} \quad (10)$$

Koristeći primjer iz [2] str. 200, računate su srednje pogreške jedinice težine na osnovu izraza (4), (9) i (10) i sve ostale srednje pogreške date izrazima (5), (6), (7) i (8). Dobivene rezultate pokazuje tablica 1.

Tablica 1. Pregled srednjih pogrešaka

Srednja pogreška	Popravke $v$	Fiktivne popravke $v'$	Razlike $d$
$m_0$	$\pm 0''99$	$\pm 0''63$	$\pm 1''00$
$m_i$	$\pm 0''99$	$\pm 0''63$	$\pm 1''00$
$\bar{m}'$	$\pm 0''29$	$\pm 0''18$	$\pm 0''29$
$\bar{m}_k$	$\pm 0''20$	$\pm 0''13$	$\pm 0''20$
$\bar{m}_p$	$\pm 0''14$	$\pm 0''09$	$\pm 0''14$

Očigledno, da se srednje pogreške računate na osnovu prvog i trećeg postupka potpuno slažu, dok se srednje pogreške dobivene pomoću drugog postupka ponešto razlikuju. Prema [6], srednja pogreška jedinice težine računata po izrazu (4) morala bi biti veća od iste srednje pogreške određene po izrazu (9), jer u njoj dolazi do izražaja pogreška podjele limba. Teorijski gledano, najispravniji je postupak ocjene točnosti prema izrazima (4), (5), (6), (7) i (8), jer koristi izvorna mjerenja.

## LITERATURA

- [1] Bjerhammar, A.: Theory of errors and generalized matrix inverses, Elsevier publishing company, Amsterdam—London—New York, 1973.
- [2] Čubranić, N.: Viša geodezija I, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1974.
- [3] Feil, L.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Skripta u rukopisu, Zagreb 1987.
- [4] Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichsrechnung, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1978.
- [5] Klak, S.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1978.
- [6] Svečnikov, N.: Viša geodezija, Prva knjiga, Savezna Geodetska Uprava, Beograd 1953.
- [7] Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Dummlers Verlag, Bonn, 1968.

## SAŽETAK

U ovom radu je izložen postupak ocjene točnosti kuteva mjerenih u svim kombinacijama, koji koristi izvorna mjerenja.

## ABSTRACT

In this work is exposed a proceeding of accuracy estimation of angles observed in all combinations, which use the original measurements.

Primljeno: 1987-09-28