JOŠ JEDANPUT O »SREDNJOJ GREŠCI JEDINICE TEŽINE«

U radu »O srednjem kvadratnom odstupanju jedinice težine« objavljenom u GL, br. 4—6, 1987., docent dr inž. G. Perović razmatra pitanja:

1. Da li srednja greška jedinice težine ima dimenziju ili ne?
2. Da li srednja greška jedinice težine zavisi od geometrije mreže?

Autor ima za cilj razjašnjenje i otklanjanje dilema koje uočava u našoj stručnoj javnosti oko pojmova vezanih za srednju grešku jedinice težine odnosno kako je i drukčije naziva srednje kvadratno odstupanje jedinice težine.

Koristeći savremene rezultate matematičke statistike autor dokazuje nezavisnost ocene srednje greške jedinice težine (odnosno ocene one veličine koja se ovde podrazumeva pod tim nazivom, a koja naprimer može biti i standard normiranog merenja) od geometrije mreže, pa time daje jasan odgovor na 2. pitanje.

Kao pripadnik starijeg, pa i najstarijeg, dela geodetske populacije, koji je sa geodetskim majčinim mlekom zadojen shvatanjem da težine nemaju dimenzije, a da srednja greška jedinice težine ima dimenziju, ne mogu ostati ravnodušan prema suprotnim tvrđenjima.

Inače, kada sam pre desetak godina uočio da u stručnoj javnosti, kako našoj tako i inostranoj, postoje nedoumice oko računanja težina kod zajedničkog izravnanja raznorodnih veličina pisao sam o tome u članku »Izravnavanje raznorodnih merenja po metodi najmanjih kvadrata i normiranje merenja«, koji je objavljen u Geodetskoj službi br. 18, 1977. U članku sam pokušao da dam objašnjenje za pojavu nedoumica. Izvor sam im video u činjenici da se tačnost raznorodnih merenja ne može direktno upoređivati. Uz konstataciju da uvođenje pojma težine nije neophodno za teoriju i praksu izravnavanja dat je i zaključak da je postupak *normiranja* jasan i sa prednostima i da će postepeno svuda potisnuti *ponderisanje.*

Čini mi se da do spora da li srednja greška jedinice težine ima ili nema dimenzije dolazi zbog nedovoljno izgrađene terminologije za pojedine oblasti Teorije grešaka. Mislim da je veoma korisno i danas obratiti se Gausu (citat prema prevodu datom u radu docenta dr inž. G. Perovića): »Ako se upoređuje nekoliko sistema opažanja ili različitih veličina nejednake tačnosti, to ćemo za njihovu relativnu težinu smatrati veličinu obratno proporcionalnu m^2, dok je istovremeno tačnost obratno proporcionalna m. Prema tome da bi težinu izrazili brojem, potrebno je za jedinicu usvojiti težinu bilo kog sistema opažanja izabranog sasvim proizvoljno«.

Vidimo da Gaus razlikuje:

— *relativnu težinu* koja je obratno proporcionalna m^2, gde je m — srednja greška opažanja (danas sve više uobičajena oznaka za ovu veličinu je σ).

— izražavanje težine *brojem.*

Prema Gausu relativne težine, koje označimo sa g_i, računaju se kao:

$$g_i = 1/m_i^2.$$

Relativne težine imaju dimenzije. Njihova primena, naprimer kod izravnavanja raznorodnih posrednih merenja po mnk, dovodi do bezdimenzionalnosti (ili kako se to kaže danas u metrologiji: dimenzija 1) tj. do jednakodimenzionalnosti svih jednačina popravaka i njihove standardizacije na standard $\sigma_n = 1$. Primena relativnih težina danas je poznata kao normiranje. Za slučaj računanja relativnih težina po izrazu $g_i = c^2/m_i^2$, gde je c konstanta bez dimenzije, i primene ovih, dolazi do standardizacije na standard $\sigma_{n.c} = c$.

Na osnovi rezultata izravnavanja (normiranih popravaka) može se dobiti ocena $\hat{\sigma}_n$ (bez dimenzije) za standard $\sigma_n = 1$, po kojoj se može testirati ispravnost hipoteze o relativnim težinama odnosno o predpostavljenim srednjim greškama merenja (m_i).

Što se tiče izražavanja težine brojem to ovo po mom mišljenju dolazi samo za slučaj jednorodnih veličina. Težina izražena brojem, koju ćemo u daljem nazivati samo *težina* računa se kao

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2},$$

gde je m_0 srednja greška jedinice težine, tj. one veličine čija je relativna težina $g_0 = 1/m_0^2$ uzeta za jediničnu relativnu težinu. Težina od m_0 je $p_0 = 1$.

Ako se standardizacija jednačina popravaka za jednorodne veličine izvrši sa težinama (p_i) to jednačine popravaka zadržavaju svoju dimenzionalnost, ali su standardizovane, na srednju grešku m_0, tj. imaju jednaku tačnost. Na osnovi standardizovanih popravaka računa se $\hat{m}_0$ — ocena za srednju kvadratsku grešku jedinice težine m_0. Kao što je poznato na osnovi vrednosti ocene $\hat{m}_0$ testira se hipoteza o predpostavljenim srednjim greškama (m_i).

Za raznorodne veličine povoljnije je raditi po postupku normiranja. U ovom slučaju zaista bi bilo bolje relativne težine nazivati standardizirajućim faktorima ili nekako drukčije. U svakom slučaju nije odgovarajuće ako se ocene za standarde $\sigma_n = 1$ i $\sigma_{n.c} = c$, koje zaista nemaju dimenzije, nazivaju srednjim kvadratskim greškama jedinice težine, jer zato nema osnova.

Vladeta Milovanović

PRIMEDBE NA ČLANAK »PRIMENA POSREDNOG IZRAVNANJA KADA SE KORISTE KVADRATI MERENIH VELIČINA (DUŽINA)«

U GL, 7—9/87 objavljen je rad prof. dr K. Vračarića: »Primena posrednog izravnanja kada se koriste kvadrati mernih veličina (dužina)«. Ako sam dobro razumeo, cilj rada je prema autoru:

Da dâ matematički dokaz ispravnosti autorova pristupa kod rešavanja pojedinih zadataka iz oblasti, koja je predmet autorovih istraživanja, — po autoru oblast regresione analize za kvadrate slučajnih veličina.

Na objavljeni rad stavljam sledeće primedbe:

1. Naslov rada nije jasan. Nije jasno da li se radi o slučaju kada se koriste kvadrati »mernih« veličina *uopšte* ili samo kada se koriste »merne« veličine *dužine*.

2. Autor propušta da koristi pojmove »funkcionalni model« i »stohastički model« i da im da sadržaje u primerima (a), b), c),) koje razmatra. Bez ovih pojmova ne mogu se jasno izlagati problemi izravnavanja po mnk uopšte, pa ni po načinu posrednih merenja.

3. Tvrđenje: »Rezultati izravnanja neće se promeniti ako se jednačine popravaka (5) pomnože proizvoljnim brojevima, naprimer $(S_{i_0} + S_i)$«, je s jedne strane *netačno*, jer se jednačina popravke, ako se ima za cilj dobivanje nepomerenih i sa najvećom težinom ocena parametara, moraju množiti korenima pripadajućih težina, a s druge strane i *protivrečno*, jer brojevi $(S_{i_0}+S_i)$ nisu »proizvoljni« već korelisani sa slobodnim članom.

Autor postiže »dokaz« za njegovo tvrđenje time što ne pravi razliku između neslučajne veličine S_{i_0} i slučajne veličine S_i i pretpostavkom $S_{0i} \sim S_i$, pa množenje sa $(S_{i_0} + S_i)$ i potonje ponderisanje sa $P_{f_i} = P_{s_i}/S_i^2$ predstavlja samo množenje i deljenje jednačine popravke sa S_i, tj. množenje i deljenje jednačine popravke sa istom veličinom. Od autorovog tretmana jednačina popravke se ne menja, pa shodno tome nema promena u određivanju nepoznatih (X_i, Y_i, X_k, Y_k) — ocenjivanju parametara.

4. Problem koji autor želi da reši je određivanje parametara η, λ i λ_0 u vezi (21). Autor neargumentovano ekstrapoluje rešenje problema koji je razmatrao — određivanje koordinata tačaka na osnovi merenih dužina — na slučaj određivanja parametara u formuli za varijansu nezatvaranja.

U svojim razmatranjima autor se zanima samo jednom transformacijom gde se slobodni član izražava kvadratima merene vrednosti funkcije i njene približne vrednosti, dok ostali deo jednačine popravke ostaje, posle primene adekvatne »težine«, isti kao i u normalnom slučaju.

Vladeta Milovanović