UDK 528.031:311.16
528.21:551.4:311.16
Originalni znanstveni rad

JEDNA NOVA INTERPRETACIJA KOEFICIJENTA LINEARNE KORELACIJE PRI OBRADI PODATAKA MJERENJA

Svetozar PETROVIĆ, Nada VUČETIĆ, Krešimir ČOLIĆ — Zagreb*

1. UVOD

U ovom se radu opisuje jedna nova interpretacija koeficijenta linearne korelacije, koja je u praktičnoj primjeni dala veoma interesantne rezultate opisane u [6] (Čolić i dr. 1986), [3] (Čolić 1987) i [19], [20] (Vučetić 1986, 1987). Kako su navedeni radovi posvećeni mnogo više analizi dobivenih rezultata, nego opisu same metode (a dva posljednja su osim toga i teže dostupni) sada smo si postavili cilj da prezentiramo prvenstveno način razmišljanja koji stoji iza svega i damo formule za praktično izračunavanje. Naime, čini nam se da ovakav pristup ima smisla u mnogim slučajevima kada se žele istraživati korelativne veze među podacima koji su rezultat mjerenja izvršenih u pojedinim točkama prostora, tj. kad podaci pokazuju plošno ili linijsko rasprostiranje. U daljnjem tekstu pretpostavljamo da je čitalac u nekoj mjeri upoznat s pojmom, načinom izračunavanja i uobičajenom interpretacijom koeficijenta linearne korelacije, vidi npr. [14] (Pavlić 1985), [13] (Pauše 1985) ili [18] (Vranić 1965). Također bi bilo poželjno, zbog primjera na kojima se ovdje predloženi postupak razmatra, da se čitalac osim s reljefom (topografijom Zemljine fizičke površine) već susreo s plohom geoida (najznačajnijom nivoplohom u geoznanostima), s Mohorovičićevim diskontinuitetom (granicom između Zemljine kore i Zemljinog plašta), te s anomalijama sile teže, napose tzv. Bouguerovim anomalijama. Moramo ipak naglasiti da se cijelo razmatranje moglo provesti i na nekim drugim primjerima, pa i takvima koji nemaju nikakve veze sa geodezijom ili nekom drugom od geoznanosti.

2. MOTIVACIJA

Pri proučavanju postojećeg odnosa između modela plohe geoida, Mohorovičićevog diskontinuiteta, reljefa Zemljine fizičke površine i Bouguerovih ano-

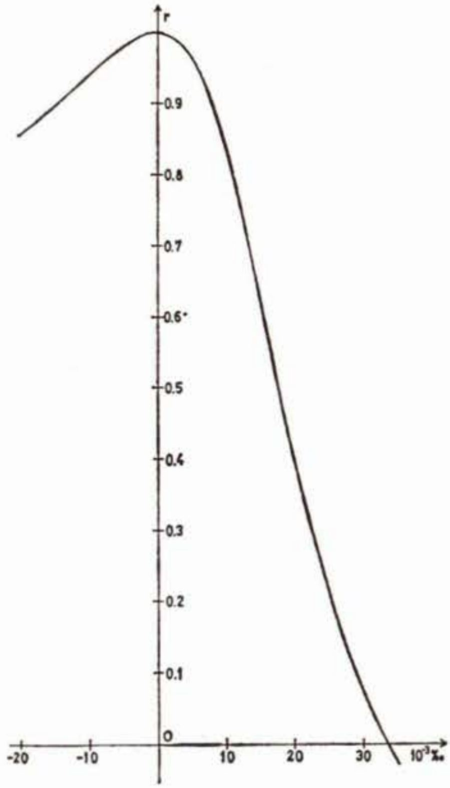
* Adresa autora: Svetozar Petrović, dipl. inž., Nada Vučetić, dipl. inž., prof. dr Krešimir Čolić, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.
Ovaj rad je nastao u okviru dviju znanstveno-istraživačkih tema: »Matematički modeli u geodeziji« i »Regionalno istraživanje oblika i plimnih valova Zemlje«, koje se izvode na Geodetskom fakultetu u Zagrebu.

malija željelo se ispitati u *kolikoj mjeri* se oblici pojedine od njih odražavaju u oblicima preostale tri. Da bi se to postiglo poduzeto je izračunavanje koeficijenata linearne korelacije između geoidnih undulacija, dubina Mohorovičićevog diskontinuiteta, iznosa Bouguerovih anomalija i nadmorskih visina reljefa na području SFRJ, a rezultati su sukcesivno objavljivani u [9] (Čolić i dr. 1982), [5] (Čolić, Petrović 1984), [7] (Čolić i dr. 1985b), [15] (Petrović i dr. 1985), [4] (Čolić i dr. 1985a). Samo računanje je provođeno na uobičajeni način, vidi npr. [14] (Pavlić 1985). Kao uzorak koji reprezentira promatrane plohe odabirao se odgovarajući broj n (konačno mnogo) točaka po cijelom ili po dijelu zahvaćenog područja, a dva obilježja koja su se uspoređivala bile su npr. apsolutne geoidne undulacije (u odnosu na opći Zemljin elipsoid) i dubine Mohorovičićevog diskontinuiteta, jedne i druge pridružene pripadnim točkama na Zemljinoj površini (odnosno na plohi referenc-elipsoida), kao i preostale kombinacije od po dva promatrana parametra.

No, postavlja se pitanje interpretacije dobivenih rezultata. U skladu s uobičajenim shvaćanjem koeficijenta linearne korelacije, ako je on skoro +1 (odnosno blizu —1) to govori o jakoj linearnoj komponenti stvarno postojeće veze među promatranim obilježjima. Ako se obilježja mogu predočiti pomoću dvije plohe, ovo bi se protumačilo kao postojanje izrazite sličnosti (odnosno jake zrcalne sličnosti) tih dviju ploha. Ovakva geometrijska interpretacija je u potpunosti ispravna.

Nasuprot tome, ako je koeficijent linearne korelacije blizu nule, tada eventualna stohastička veza među obilježjima nema jaku linearnu komponentu. Budući da je cilj ustvari bio ispitivanje u kolikoj se mjeri oblici jedne plohe odražavaju u oblicima druge, odsustvo jake linearne komponente treba geometrijski interpretirati. Sam po sebi nameće se zaključak — u skladu s dosad uobičajenom interpretacijom — da veza među oblicima dviju ploha, ukoliko uopće postoji, nije jednostavna (linearna), tj. da plohe nisu ni naročito slične niti zrcalno slične.

Nažalost, ovaj posljednji zaključak je pogrešan. Naime, ako je koeficijent linearne korelacije blizu nule, to može, ali ne mora biti posljedica toga što dvije plohe imaju oblike koji se zamjetno razlikuju. Dapače, dvije plohe mogu imati čak i posve identičan oblik, a da koeficijent korelacije ipak bude blizu nule ili baš i sama nula. To lijepo ilustrira primjer preuzet iz [19] (Vučetić 1986, str. 27—28). Promatrana je linearna korelacija između dviju ploha potpuno jednakog oblika — jedna ploha bio je model geoida za područje SFRJ sa apsolutnom orijentacijom u prostoru kakva je prvobitno dana u [2] (Čolić 1979), a druga ploha taj isti model geoida ali s ponešto promijenjenom apsolutnom orijentacijom, dobivenom kontinuiranim naginjanjem tog modela oko odabrane horizontalne osi. Uzorak koji je korišten za izračunavanje sastojao se od 719 točaka raspoređenih ravnomjerno preko cijelog teritorija i to u rasteru sa stranicama $\Delta B = 10'$ i $\Delta L = 15'$. Dobiven je na prvi pogled veoma neobičan rezultat: iako su dvije promatrane plohe potpuno identičnog oblika, već i mali nagibi izazivali su znatne promjene koeficijenta linearne korelacije! Tako je npr. za nagib od samo 0.034‰ oko odabrane osi koeficijent linearne korelacije bio baš nula! Nastale promjene koeficijenta linearne korelacije pri mijenjanju nagiba, tj. međusobnog položaja ove dvije plohe potpuno jednakog oblika, prikazane su na slici 1. Kao primjer mogla se odabrati bilo koja ploha (osim horizontalne ravnine) bez obzira da li ona ima neko fizikalno značenje, npr. neka slučajno generirana ploha, i rezultat bi bio posve analogan — razlika bi bila jedino u tome što bi se pri naginjanju koeficijent linearne korelacije mijenjao nešto brže ili nešto sporije.



Slika 1. Mijenjanje koeficijenta linerane korelacije uslijed naginjanja jedne od ploha

Analogna razmatranja mogu se provesti i za jednostavniji, dvodimenzionalni slučaj, kada se želi proučiti kako se međusobno odnose oblici dviju krivulja, tj. kada dva obilježja koja se uspoređuju predstavljaju ordinate točaka koje leže na tim dvjema krivuljama.

Znači, uvijek kada se koeficijent linearne korelacije izračunava sa ciljem uspoređivanja dviju pojava koje se geometrijski mogu prikazati kao dvije plohe (odnosno dvije krivulje), treba biti jako oprezan pri geometrijskom tumačenju dobivenih rezultata, tj. pri izvođenju *kvantitativnih zaključaka* o sličnosti oblika tih ploha (krivulja).

3. NOVI PRISTUP PROBLEMATICI

Kao što je u uvodu rečeno, u ovom radu nas interesira ispitivanje linearne korelacije među pojavama koje su reprezentirane podacima nastalim kao rezultat mjerenja izvršenih u pojedinim točkama prostora, ili još preciznije, među takvim pojavama koje se mogu shvatiti kao plohe (npr. geoid, Mohorovičićev diskontinuitet, reljef, ali i mnoge druge). Iz svega dosadašnjeg postaje jasno da je dobiveni koeficijent linearne korelacije između dviju ploha posljedica *dviju komponenti* njihovog faktičnog odnosa : stupnja sličnosti njihovih oblika i njihovog međusobnog položaja u prostoru. Cilj nam je da *razdvojimo te dvije komponente*, točnije: da razlučimo njihove utjecaje na koeficijent linearne korelacije.

Da bismo postigli željeni cilj, promatrat ćemo kako varira koeficijent linearne korelacije ako mijenjamo međusobni položaj dviju ploha tako da jednu od njih zadržimo fiksiranom u prostoru, a drugoj mijenjamo položaj. Budući da iznos (apsolutna vrijednost) koeficijenta linearne korelacije ne može premašiti 1, tj. ne može se bez kraja povećavati, on će u nekom trenutku poprimiti maksimalnu moguću vrijednost za dane plohe. Međusobni položaj promatranih ploha u tom trenutku zvat ćemo *najpovoljnijim*. Jasno je da je pripadni *maksimalni koeficijent linearne korelacije* mjera sličnosti oblika promatranih ploha iz koje su uklonjeni utjecaji njihovog međusobnog položaja. Naravno da će u svakom konkretnom slučaju trebati potražiti fizikalnu ili neku drugu interpretaciju i opravdanje razlike između polaznog i najpovoljnijeg položaja.

Kao što je poznato, svaka promjena položaja plohe može se rastaviti na translaciju i rotaciju u prostoru. S obzirom na prirodu problema ograničit ćemo se samo na takve slučajeve (kao što su npr. oni koji su i bili motivacija za razradu ovog postupka) kod kojih komponenta rotacije oko vertikalne osi i komponenta translacije okomito na vertikalnu os smiju poprimiti samo veoma male iznose, sitnije nego što je finoća datoteka s kojima se radi, pa ih se može zanemariti. Preostaje dakle translacija u vertikalnom smjeru i naginjanje oko horizontalne osi.

Pokazat ćemo najprije da translacija u vertikalnom smjeru *nikad* ne mijenja koeficijent linearne korelacije. Označimo promatrana obilježja (plohe) sa X i Y. Neka se uzorak koji reprezentira te plohe sastoji od n točaka, tako da su u svakoj od njih poznate pripadne vrijednosti X i Y. Uz upotrebu Gaussovih oznaka za sume, koeficijent linearne korelacije može se napisati u obliku

$$r(X, Y) = \frac{n[XY] - [X][Y]}{\sqrt{n[X^2] - [X]^2}\sqrt{n[Y^2] - [Y]^2}}. \tag{1}$$

Ako plohu Y translatiramo za iznos a u smjeru vertikale, imamo

$$Y' = Y + a, \tag{2}$$

pa tada koeficijent linearne korelacije postaje

$$r(X, Y') = \frac{n[XY'] - [X][Y']}{\sqrt{n[X^2] - [X]^2}\sqrt{n[Y'^2] - [Y']^2}}. \tag{3}$$

Pomoću (2) dobijemo

$$n[XY'] - [X][Y'] = n[X(Y + a)] - [X][Y + a] = \ldots = n[XY] - [X][Y]$$

$$n[Y'^2] - [Y']^2 = n[(Y + a)^2] - [Y + a]^2 = \ldots = n[Y^2] - [Y]^2$$

što znači da je

$$r(X, Y') = r(X, Y), \tag{4}$$

to jest, translacija u vertikalnom smjeru ne mijenja koeficijent linearne korelacije. Prema tome, treba ispitati jedino utjecaj naginjanja oko horizontalne osi. Izgleda da je potpuno egzaktno rješenje teško pronaći, pa smo se zato zadovoljili približnim rješenjem. Pretpostavili smo, što je u skladu s prirodom problema na koje smo primjenjivali ovaj postupak, da u obzir dolaze samo mali nagibi. Prije svake primjene opisanog postupka treba provjeriti da li je zaista tako. To će najčešće i biti slučaj kada se radi o vrsti problema naznačenih u uvodu, tj. o uspoređivanju dvaju skupova podataka koji su rezultat mjerenja izvršenih u pojedinim točkama prostora, npr. na Zemljinoj fizičkoj površini.

Neka je položaj svake točke kojoj su pridružene vrijednosti X i Y opisan pomoću dviju veličina, označimo ih B i L, što mogu biti npr. geodetska širina i duljina, kao u našim primjerima, ili neke druge koordinate. Mali nagib plohe Y može se približno opisati relacijom

$$Y'' = Y + bB + cL \tag{5}$$

gdje su b i c parametri koji opisuju provedeno malo naginjanje.

Uvrštavanje Y″ iz (5) umjesto Y u brojnik od (1) daje

$$\begin{aligned} n[XY''] - [X][Y''] &= n[X(Y + bB + cL)] - \\ - [X][Y + bB + cL] &= \ldots = n[XY] - [X][Y] + (n[BX] - \\ &- [B][X])\,b + (n[LX] - [L][X])\,c. \end{aligned}$$

Ako uvedemo oznake

$$F = n[XY] - [X][Y],\ G = n[BX] - [B][X],\ H = n[LX] - [L][X] \tag{6}$$

dobit ćemo

$$n[XY''] - [X][Y''] = F + Gb + Hc. \tag{7}$$

Na isti način sredimo i nazivnik:

$$\begin{aligned} n[Y''^2] - [Y'']^2 &= n[(Y + bB + cL)^2] - [Y + bB + cL]^2 = \ldots = \\ &= n[Y^2] - [Y]^2 + (n[B^2] - [B]^2)\,b^2 + (n[L^2] - [L]^2)\,c^2 + \\ &+ 2(n[BY] - [B][Y])\,b + 2(n[LY] - [L][Y])\,c + \\ &+ 2(n[BL] - [B][L])\,bc. \end{aligned}$$

Radi kratkoće pisanja uvedimo još oznake:

$$\begin{aligned} k_1 &= n[Y^2] - [Y]^2, & k_4 &= n[BY] - [B][Y], \\ k_2 &= n[B^2] - [B]^2, & k_5 &= n[LY] - [L][Y], \\ k_3 &= n[L^2] - [L]^2, & k_6 &= n[BL] - [B][L], \end{aligned} \tag{8}$$

pa dobivamo

$$n[Y''^2] - [Y'']^2 = k_1 + k_2 b^2 + k_3 c^2 + 2k_4 b + 2k_5 c + 2k_6 bc.$$

Sada označimo

$$
\begin{aligned}
V &= \sqrt{n\,[X^2] - [X]^2},\\
W &= \sqrt{k_1 + k_2 b^2 + k_3 c^2 + 2k_4 b + 2k_5 c + 2k_6 bc},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

pa konačno umjesto (1) imamo

$$
r\,(X, Y'') = \frac{F + Gb + Hc}{VW}. \tag{10}
$$

Relacija(10) daje ovisnost koeficijenta linearne korelacije o parametrima b i c koji definiraju malo naginjanje polazne plohe Y. Kao što je rečeno na početku ovog odjeljka, zanima nas za koji položaj plohe Y″, tj. za koje vrijednosti parametara b i c, r (X, Y″) poprima ekstremnu vrijednost.

Kako su F, G, H i V konstante, a W funkcija od b i c, nužni uvjet za ekstrem glasi:

$$
r_b = \frac{\partial r}{\partial b} = 0, \qquad r_c = \frac{\partial r}{\partial c} = 0, \tag{11}
$$

pa iz (10) dobijemo:

$$
\begin{aligned}
r_b &= \frac{GVW - (F + Gb + Hc)\,VW_b}{V^2W^2} = 0\\
r_c &= \frac{HVW - (F + Gb + Hc)\,VW_c}{V^2W^2} = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Deriviranjem izraza za W iz (9) po b i c, te malim sređivanjem dobivamo:

$$
W_b = \frac{k_2 b + k_4 + k_6 c}{W}, \qquad W_c = \frac{k_3 c + k_5 + k_6 b}{W},
$$

pa tako (12) prelazi u

$$
\frac{GW^2 - (F + Gb + Hc)\,(k_2 b + k_4 + k_6 c)}{VW^3} = 0
$$

$$
\frac{HW^2 - (F + Gb + Hc)\,(k_3 c + k_5 + k_6 b)}{VW^3} = 0,
$$

što se svodi na jednadžbe

$$
\begin{aligned}
(F + Gb + Hc)\,(k_2 b + k_4 + k_6 c) &= GW^2\\
(F + Gb + Hc)\,(k_3 c + k_5 + k_6 b) &= HW^2.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Ovo je nelinearan sistem jednadžbi s 2 nepoznanice: b i c. Ipak, može ga se egzaktno riješiti. Dijeljenje prve jednadžbe s drugom daje

$$
\frac{k_2 b + k_4 + k_6 c}{k_3 c + k_5 + k_6 b} = \frac{G}{H}.
$$

Iz ove jednadžbe možemo izraziti b:

$$b = \frac{k_3G - k_6H}{k_2H - k_6G} c + \frac{k_5G - k_4H}{k_2H - k_6G}.$$

Konačno uvedimo još oznake

$$b_1 = \frac{k_3G - k_6H}{k_2H - k_6G}, \qquad b_2 = \frac{k_5G - k_4H}{k_2H - k_6G}, \tag{14}$$

pa imamo

$$b = b_1c + b_2. \tag{15}$$

Uvrstimo (9) i (15) u (13), te nakon kraćeg sređivanja dobijemo

$$\begin{aligned}(-Gk_6b_1 + Hk_2b_1 + Hk_6 - Gk_3)\,c^2 + (Fk_2b_1 + Fk_6 - Gk_4b_1 - \\ - Gk_6b_2 + Hk_2b_2 + Hk_4 - 2Gk_5)\,c + Fk_2b_2 + Fk_4 - \\ - Gk_1 - Gk_4b_2 = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Iz (14) se lako izvede

$$-Gk_6b_1 + Hk_2b_1 + Hk_6 - Gk_3 = 0$$

i

$$-Gk_6b_2 + Hk_2b_2 + Hk_4 - Gk_5 = 0,$$

što uvršteno u (16) daje

$$(Fk_2b_1 + Fk_6 - Gk_4b_1 - Gk_5)\,c + Fk_2b_2 + Fk_4 - Gk_1 - Gk_4b_2 = 0,$$

to jest

$$c = \frac{-Fk_2b_2 - Fk_4 + Gk_1 + Gk_4b_2}{Fk_2b_1 + Fk_6 - Gk_4b_1 - Gk_5}. \tag{17}$$

Sada kada imamo izraz za c, relacija (15) nam daje i drugi traženi parametar: b. Dobiveno rješenje (vrijednosti b i c) zadovoljava nužni uvjet za ekstrem (11). Treba još provjeriti da se zaista radi o maksimumu. Kako ta provjera ne doprinosi bitno shvaćanju samog problema — a i pripadni izvod je prilično obiman — ovdje je izostavljena.

Lako se može pokazati da je smjer horizontalne osi oko koje je provedeno naginjanje u odnosu na os B dan pomoću

$$A = \operatorname{arctg}(-b/c), \tag{18}$$

a iznos samog nagiba ν:

$$\nu = b \sin A - c \cos A \tag{19}$$

u jedinicama koje su omjer jedinica u kojima je bilo obilježje Y i jedinica u kojima su koordinate B i L.

4. PRAKTIČNI POSTUPAK KOD KORIŠTENJA IZVEDENIH FORMULA

Budući da je izvod ipak bio relativno kompliciran, evo kratke rekapitulacije postupka za praktično izračunavanje.

U n točaka $T_1, T_2, \ldots, T_n$, čiji su položaji dani sa (B_1, L_1), (B_2, L_2), ... (B_n, L_n), poznate su vrijednosti dvaju obilježja X i Y, tj. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2 \ldots, Y_n$.

Računamo:

— iz (6) : F, G, H
— iz (8) : $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$
— iz (14) : b_1, b_2
— iz (17) : c
— iz (15) : b
— iz (18) i (19) : smjer horizontalne osi i iznos nagiba
— na kraju se pomoću (5) može plohu Y transformirati u plohu Y″.

Rezultat je naravno dobar jedino ako je ispunjena polazna pretpostavka, tj. ako je nagib između polazne i novodobivene plohe mali. Tada se smije izračunati traženi maksimalni koeficijent linearne korelacije r (X, Y″).

Ono što slijedi je naravno najvažnije. Iz maksimalnog koeficijenta linearne korelacije r (X,Y″) koji je oslobođen utjecaja međusobnog položaja dviju promatranih ploha treba izvesti zaključke o stupnju sličnosti njihovih postojećih oblika. Također je interesantno koliko se r (X, Y″) razlikuje od r (X, Y) koji je bio posljedica i oblika i položaja, kao i koliki nagib je uzrokovao tu promjenu koeficijenta linearne korelacije. Konačno treba razjasniti da li proizašlo naginjanje ima neko fizikalno ili drugo objašnjenje koje bi bilo u skladu s prirodom razmatranog problema.

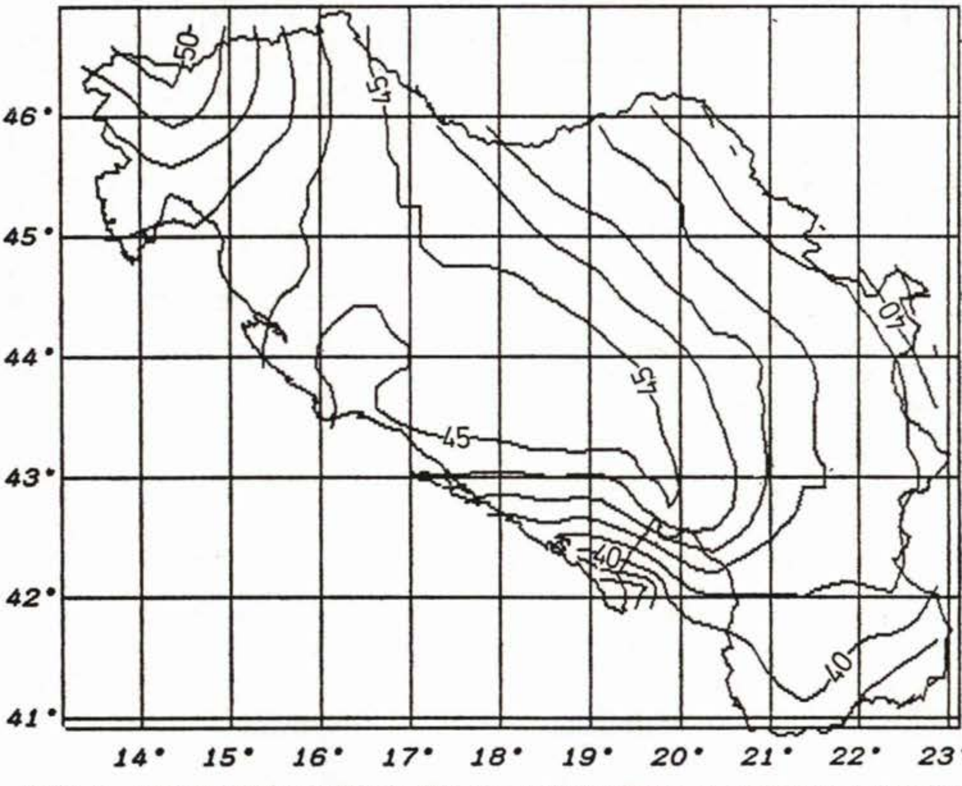
5. PRIMJER PRIMJENE OPISANOG POSTUPKA

Apsolutno orijentirani astro-geodetski model geoida za područje SFRJ dobiven je po prvi put fitovanjem (prilagođenjem) po metodi najmanjih kvadrata Muminagićevog »realnog geoida« [11], [12] (Muminagić 1971a, 1971b) na u to vrijeme najnoviji i najbolji uglačani dugovalni satelitsko-terestrički model GEM10, što je detaljno opisano u [1] i [2] (Čolić 1978, 1979). Tada dobiveni rezultat prikazan je ovdje na slici 2. Prilikom ispitivanja linearne korelacije između takvog modela plohe geoida i Mohorovičićevog diskontinuiteta, Bouguerovih anomalija, odnosno visina reljefa, što smo uradili koristeći vrijednosti u 719 točaka rastera (sa stranicama Δ B = 10′ i Δ L = 15′), raspoređenih ravnomjerno preko teritorija Jugoslavije, dobivene su neočekivano niske vrijednosti koeficijenata linearne korelacije (—0.25, —0.18, odnosno +0.01).

Kako je od početka, zbog male površine jugoslavenskog teritorija i velike uglačanosti korištenog dugovalnog modela geoida GEM10, postojala izvjesna skepsa da li je model geoida sa slike 2 baš najsavršenije apsolutno orijentiran u prostoru, ima smisla postaviti pitanje da li neka mala promjena njegove apsolutne orijentacije bitno mijenja spomenute koeficijente linearne korelacije. Po postupku opisanom u ovom radu izračunato je kako bi trebalo nagnuti postojeći model geoida da koeficijent linearne korelacije između njega i Mohorovičićevog diskontinuiteta bude maksimalan. Analogno izračunavanje provedeno je i za odnos geoida prema Bouguerovim anomalijama, odnosno reljefu. Kako su sva tri dobivena rezultata bila međusobno relativno slična, a vodila su na veoma veliko povećanje koeficijenata linearne korelacije

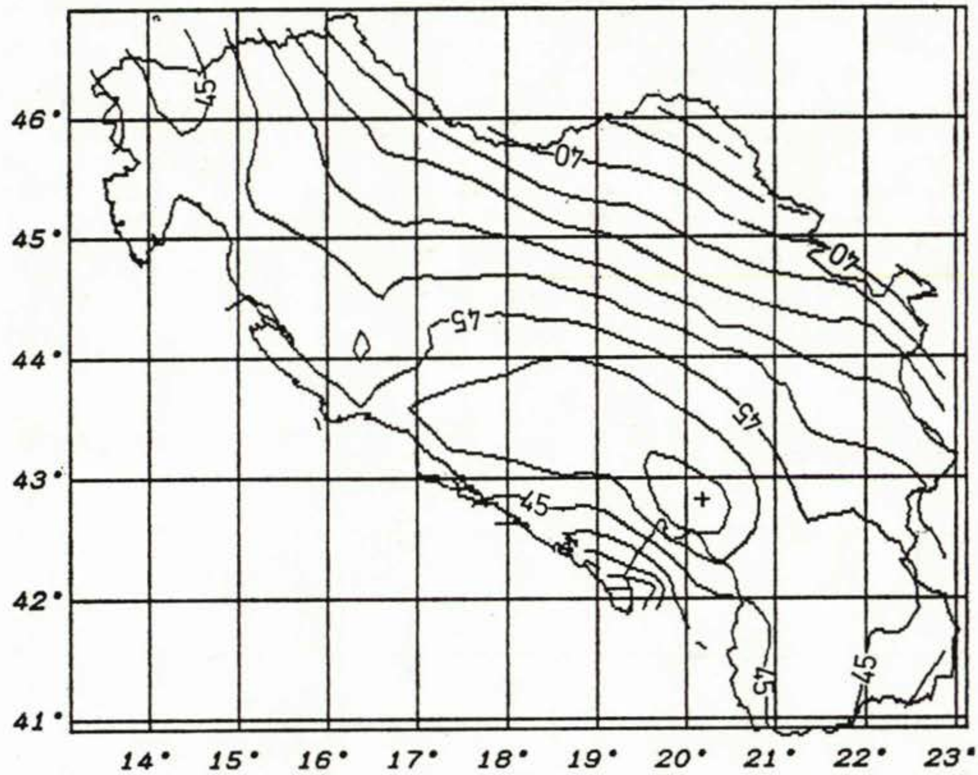
(—0.84, —0.69, +0.69), uzeta je izvjesna »srednja vrijednost« triju spomenutih naginjanja i tako je dobiven novi model geoida (slika 3) koji ima bolju apsolutnu orijentaciju, vidi [6] (Čolić i dr. 1986).

Mnogima će ovakav novi i neuobičajeni način izvođenja apsolutne orijentacije geoida pomoću njegovog usklađivanja sa navedena tri fizikalna parametra izgledati na prvi pogled neprihvatljiv, ili barem neprihvatljiviji od starog dobrog fitovanja po metodi najmanjih kvadrata. Zato je nakon svega ponovno urađeno i takvo fitovanje, ali ne na stari GEM10, nego na najnovije satelitsko-terestričke modele GPM2 [21] (Wenzel 1985) i RAPP81 [16] (Rapp 1981), vidi [8] (Čolić i dr. 1987). Na slici 4 prikazan je rezultat fitovanja Muminagićevog modela geoida na GPM2 (nešto slično daje i fitovanje na RAPP81). Međusobne razlike i sličnosti slika 2, 3 i 4 može čitalac lako sam uočiti.



Slika 2. Astrogeodetski model geoida za područje SFRJ u apsolutnoj orijentaciji postignutoj fitovanjem (prilagođenjem) realnog geoida po Muminagiću na odgovarajući dio dugovalnog modela GEM10.

Dakle, u ovom primjeru izvršeni nagib ima veoma jasnu interpretaciju — stvarno poboljšanje apsolutne orijentacije postojećeg (isključivo na temelju astrogeodetskih otklona vertikale izračunatog) modela geoida za teritorij SFRJ.



Slika 3. Model geoida za područje SFRJ dobiven poboljšanjem apsolutne orijentacije modela sa slike 2 na temelju maksimalnih koeficijenata linearne korelacije.

6. SLUČAJ DVIJU KRIVULJA

Prema našim iskustvima, potreba za ovakvom usporedbom oblika dviju krivulja će se rjeđe pojaviti nego potreba za usporedbom dviju ploha. Ipak, kako se sam postupak ne da napisati doslovno kao specijalni slučaj gore opisanog za dvije plohe, dajemo ovdje kratki opis samog računanja.

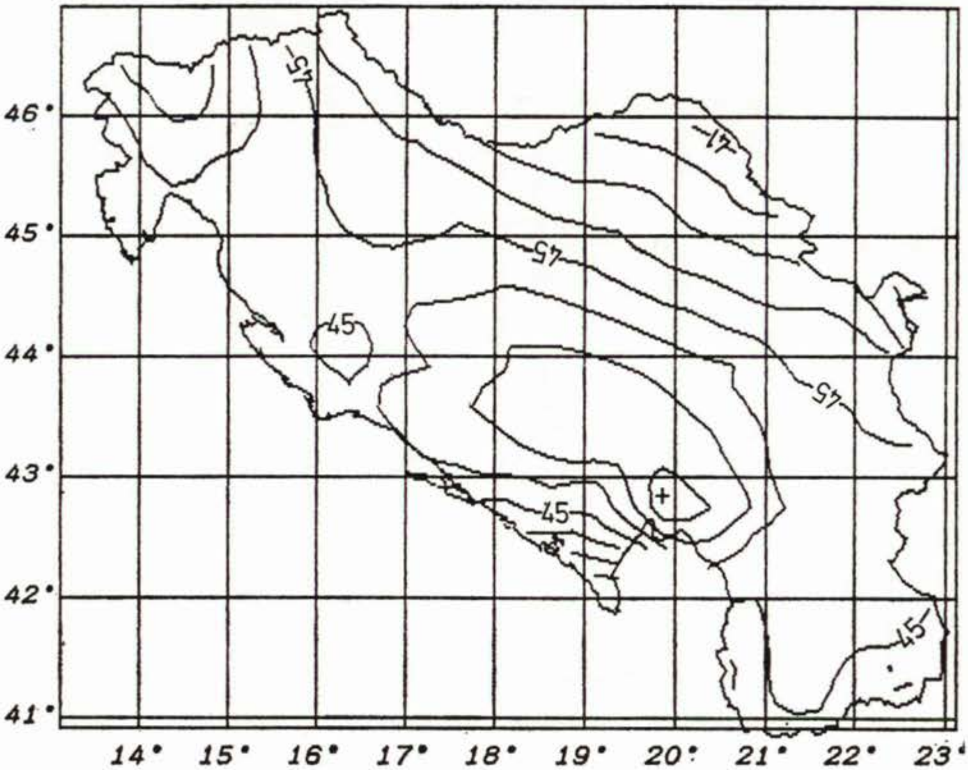
Neka je krivulja reprezentirana sa n točaka T_1, T_2 . . . , T_n, čiji su položaji dani sa B_1, B_2 . . . , B_n, a poznate su vrijednosti dvaju obilježja X i Y, tj. X_1, X_2, . . . , X_n i Y_1 Y_2, ... , Y_n. Polazimo od:

$$\tilde{Y} = Y + bB. \tag{20}$$

i računamo

$$F = n\,[XY] - [X]\,[Y], \qquad G = n\,[BX] - [B]\,[X],$$

$$\begin{aligned} k_1 &= n\,[Y^2] - [Y]^2, \\ k_2 &= n\,[B^2] - [B]^2, \\ k_3 &= (n\,[BY] - [B]\,[Y]), \end{aligned} \tag{21}$$



Slika 4. Astrogeodetski model geoida za područje SFRJ u apsolutnoj orijentaciji postignutoj fitovanjem realnog geoida po Muminagiću na odgovarajući dio novog geopotencijalnog modela GPM2.

te na kraju

$$b = \frac{Gk_1 - Fk_3}{Fk_2 - Gk_3}. \tag{22}$$

Budući da se promatrane krivulje nalaze u istoj ravnini, pojam smjera osi oko koje se naginje ovdje nema smisla, dok je naginjanje ω koje treba izvršiti:

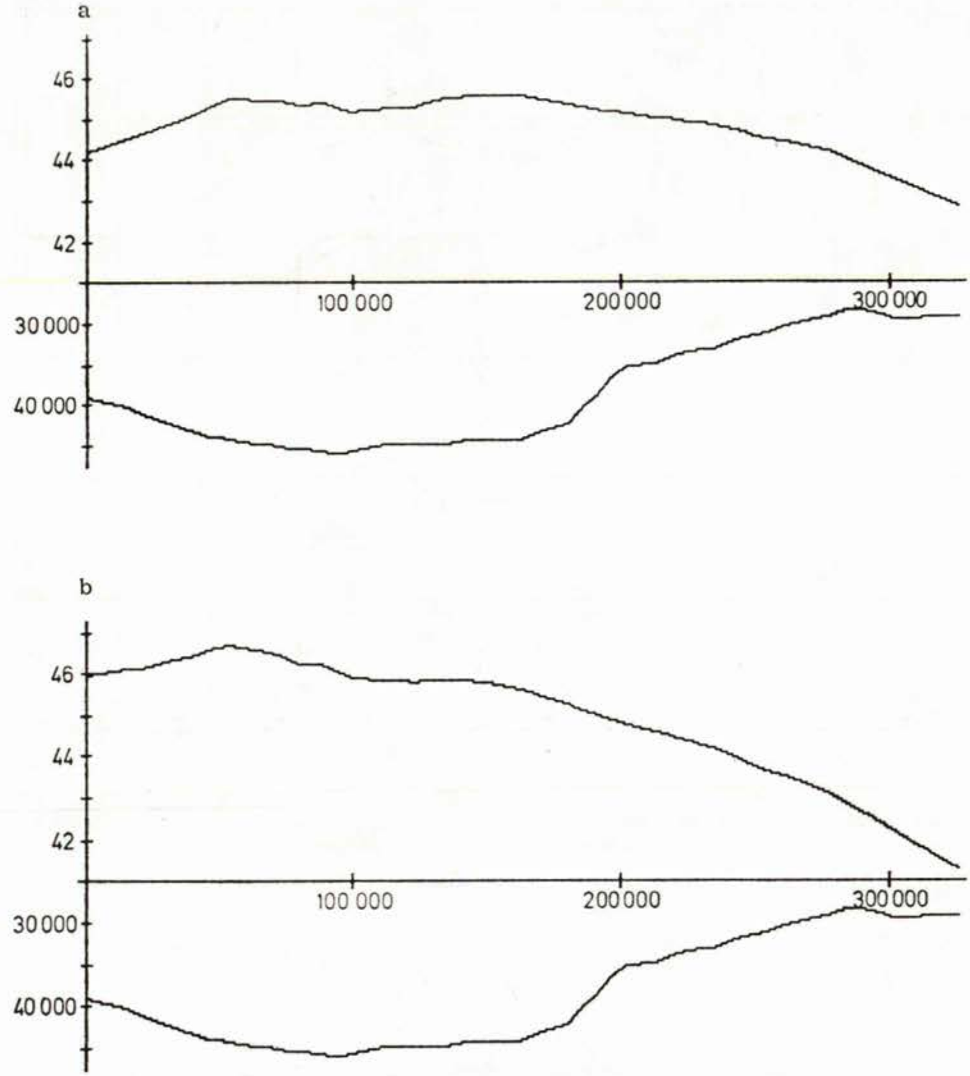
$$\omega = b, \tag{23}$$

u jedinicama koje su omjer jedinica u kojima je bilo obilježje Y i jedinica u kojima je koordinata B.

Sama transformacija (malo naginjanje) krivulje ide, jasno, po formuli (20).

Primjer:

Već na prvi pogled vidljivo je da su dvije krivulje sa slike 5a po svom općem toku u priličnoj mjeri zrcalno slične. Ako se pokuša pomoću koeficijenta linearne korelacije kvantitativno izraziti tu sličnost, npr. u svrhu izvođenja



Slika 5. Polazni položaj dviju promatranih krivulja (a) i njihov međusobni najpovoljniji položaj nakon provedenog naginjanja jedne od njih (b).

zaključka u kojoj mjeri je sličnost ovih dviju krivulja manja ili veća nego međusobna sličnost nekih drugih dviju, dobija se koeficijent linearne korelacije r = —0.85. Kao što je objašnjeno ova vrijednost je posljedica dvaju faktora: međusobnog položaja krivulja i sličnosti njihovih oblika. Zato ne bi bilo dobro ovaj iznos direktno uspoređivati sa pripadnim iznosom za neke druge dvije krivulje, nego bi kao kvantitativnu mjeru sličnosti trebalo koristiti maksimalni koeficijent linearne korelacije. Po ovdje opisanom postupku proizašlo je da bi trebalo prvu krivulju nagnuti za 0.010‰ (slika 5b) što dovodi do porasta koeficijenta linearne korelacije na —0.93. Upravo ova vrijednost je čista mjera sličnosti oblika dviju krivulja oslobođena utjecaja njihovog međusobnog položaja.

Uočimo da u ovom slučaju potrebno naginjanje nije naročito veliko. Također, porast koeficijenta linearne korelacije (sa —0.85 na —0.93) je, za razliku od ranijeg primjera, prilično mali. To nije naročito čudno ako se uzme u obzir da je već polazna vrijednost (—0.85) bila po iznosu prilično visoka, a uopće moguće ekstremne vrijednosti su —1 i +1. Naravno da se pojavljuje i ona treća vrsta primjera — polazni koeficijent linearne korelacije blizu 0, a maksimalni ne mnogo veći — to se događa kada oblici dviju krivulja (ili ploha) zaista ne pokazuju u nekoj znatnijoj mjeri sličnosti u ponašanju.

Usput, slika 5 ilustrira još nešto. Obično se u literaturi uzima da je korelacija dobra ako je koeficijent linearne korelacije po iznosu veći od 0.5, vidi npr. [18] (Vranić 1965) ili [10] (Klak 1982). Poneki autori to detaljnije razvrstavaju: prema [17] (Serdar 1972) iznos između 0.5 i 0.7 »pokazuje vezu koja ima praktičnu važnost«, od 0.7 do 0.9 »usku vezu«, a veći od 0.9 »vrlo usku vezu«. Neiskusan čitalac će tada na temelju vrijednosti —0.93 očekivati skoro savršeno linearnu vezu među obilježjima, tj. gotovo potpuno zrcaljenje oblika jedne krivulje u drugoj. Pažljiviji pogled na sliku 5b pokazuje da se ipak u razlici između —0.93 i —1 još uvijek kriju znatne nelinearnosti (odnosno geometrijski rečeno, nesličnosti). Zato smatramo da pri proglašavanju vrijednosti koeficijenta linearne korelacije za relativno visoke, jako visoke itsl., treba biti mnogo oprezniji, nego li je to inače uobičajeno.

7. ZAKLJUČAK

Sada je očito da čak i kod ispitivanja najjednostavnije moguće veze između dviju pojava — linearne veze — postoje zamke na koje treba paziti. Ako se iz koeficijenta linearne korelacije žele izvoditi *kvantitativni zaključci* o odnosu oblika dviju ploha, tada njegova uobičajena interpretacija koja zanemaruje da je u tom slučaju svakoj točci osim dvaju promatranih obilježja pridružen i položaj, može dovesti do pogrešnih zaključaka, za što ima dosta primjera u postojećoj literaturi. Zato je u takvim slučajevima izlaz u primjeni ovdje opisanog postupka koji razdvaja utjecaj sličnosti dviju ploha od utjecaja njihovog međusobnog položaja u prostoru. Ne treba posebno dokazivati da se i za »plošni slučaj« i za »krivuljni slučaj« može bez sumnje naći ogroman broj primjera za njihovu uspješnu primjenu, i to ne samo u geodeziji i uopće u geoznanostima, nego i u širokom području tehničkih disciplina i drugdje. Zbog toga smatramo ovakav dosad neuobičajeni pristup rješenju razmatranog problema veoma značajnim i korisnim ne samo s teoretske već i s praktične strane.

LITERATURA:

[1] Čolić, K.: An investigation of the astrogeodetic geoid of Yugoslavia using gravimetric data, Proceedings of International Symposium on the Geoid in Europe and Mediterranean Area, Ancona 1978, 99—112.

[2] Čolić, K.: Dugovalni (uglačani) gravimetrijski geoid za Jugoslaviju i njegova primjena, Geodetski list, 1979, 7—9, 171—191.

[3] Čolić, K.: Wechselwirkung Geodäsie-Geophysik an einem Beispiel aus Jugoslawien. Technische Universität Wien, 14. 05. 1987. (gostujuće predavanje, skraćena verzija u pripremi za tisak u ÖZfV).
[4] Čolić, K.; Aljinović, B.; Petrović, S.: A comparison of the existing preliminary map of Mohorovičić discontinuity with the predicted values of the depths of that surface in the Dinaric-Pannonian region of Yugoslavia, Abstract, ETH Bericht, Nr. 102, Zürich 1985 a, 16.
[5] Čolić, K.; Petrović, S.: Correlation between gravity anomalies, geoid heights and Mohorovičić discontinuity depths in the Dinaric-Pannonian region of Yugoslavia, Proceedings of the International association of geodesy (IAG) symposia, OSU, Columbus/Ohio 1984, 137—146.
[6] Čolić, K.; Petrović, S.; Aljinović, B.: Testing the existing absolute geoid heights in Yugoslavia using information offered by the Mohorovičić discontinuity and by other geophysical parameters, Association Internationale de Géodésie — Proceedings of the international symposium on the definition of the geoid, Vol. 1, Istituto geografico militare Italiano, Firenze 1986, 29—39.
[7] Čolić, K.; Petrović, S.; Bašić, T.: Anew about the correlation between Mohorovičić discontinuity depths, geoid undulations and Bouguer gravity anomalies in the Dinaric-Pannonian region of Yugoslavia, Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde, Nr. 81, Teil I, Akademie der Wissenschaften der DDR, Potsdam 1985 b, 68—76.
[8] Čolić, K.; Petrović, S.; Bašić, T.: What happens when using the method of least squares for the fitting of geoid model surfaces?, INTERCOSMOS scientific conference »Use of artificial satellite observations for geodesy and geophysics«, Szentendre 1987.
[9] Čolić, K.; Petrović, S.; Bašić, T.; Krinc, M.: Istraživanje međusobnog položaja plohe geoida i Mohorovičićevog diskontinuiteta odnosno baze sedimenata na teritoriju SFRJ, Zbornik radova savjetovanja »Rezultati dosadašnjih geofizičkih ispitivanja raznih fenomena vezanih za proučavanje građe Zemljine kore i gornjeg omotača na teritoriji Jugoslavije«, Komitet za geofiziku, Skopje 1982, 177—204.
[10] Klak, S.: Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1982.
[11] Muminagić, A.: Ispitivanje realnog geoida u Jugoslaviji, Disertacija, Zagreb (Beograd) 1971 a.
[12] Muminagić, A.: Investigation of real geoid in Yugoslavia, 15. Gen. Ass. IUGG, IAG, Moskva 1971 b.
[13] Pauše, Z.: Vjerojatnost, Školska knjiga, Zagreb 1985.
[14] Pavlić, I.: Statistička teorija i primjena, Školska knjiga, Zagreb 1985.
[15] Petrović, S.; Čolić, K.; Biljecki, Z.; Bašić, T.: The use of complex data for the prediction of Mohorovičić discontinuity depths in the Dinaric-Pannonian region of Yugoslavia, Abstract, ETH Bericht, Nr. 102, Zürich 1985, 29.
[16] Rapp, R. H.: The Earth's gravity field to degree and order 180 using SEASAT altimeter data, terrestrial gravity data, and other data, The OSU report no. 322, Columbus/Ohio 1981.
[17] Serdar, V.: Udžbenik statistike, Školska knjiga, Zagreb 1972.
[18] Vranić, V.: Vjerojatnost i statistika, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.
[19] Vučetić, N.: Apsolutna orijentacija astro-geodetskog modela geoida za teritorij SFRJ pomoću Mohorovičićevog diskontinuiteta, Studentski rad povodom Praznika rada, Zagreb 1986.
[20] Vučetić, N.: Linearna korelacija između apsolutnih geoidnih undulacija i dubina Mohorovičićevog diskontinuiteta, Diplomski rad, Zagreb 1987.
[21] Wenzel, H.-G.: Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde, Wiss. Arb. Fachr. Verm.-wesen, Univ. Hannover, Nr .137, Hannover 1985.

SAŽETAK

Razmatraju se mogućnosti geometrijske interpretacije koeficijenta linearne korelacije pri istraživanju korelativne veze među podacima koji su rezultat mjerenja izvršenih u pojedinim točkama prostora. Radi se dakle o slučajevima kada se koeficijent linearne korelacije pokušava shvatiti kao mjera sličnosti oblika dviju ploha, odnosno dviju krivulja. U ovom radu pokazano je da uobičajeni pristup tome problemu može dovesti do pogrešnih zaključaka, jer je koeficijent linearne korelacije između dviju ploha (krivulja) posljedica dviju komponenti njihovog faktičnog odnosa: stupnja sličnosti njihovih oblika i njihovog međusobnog položaja u prostoru. U tom smislu nudi se novi postupak koji omogućuje razdvajanje tih dviju komponenti. Na taj način postaje moguće da se na temelju koeficijenta linearne korelacije zaista donose korektni kvantitativni zaključci o međusobom odnosu oblika dviju ploha ili krivulja.

ABSTRACT

The authors discuss possibilities for a geometrical interpretation of the linear correlation coefficient in the investigation of the correlative relation between such data which result from measurements effected at particular points in space. Hence, it is about cases when one tries to conceive the linear correlation coefficient as a measure of similarity between the shapes of two surfaces, respectively two curves. In the present paper, the authors show that the usual approach to that problem can lead to wrong conclusions, because the linear correlation coefficient between two surfaces (curves) is the consequence of two components of their actual relationship: the degree of similarity between their shapes, and their mutual position in space. In that sense the paper offers a new procedure which enables the separation of those two components. In such a way, on the basis of the linear correlation coefficient it becomes possible to draw correct quantitative conclusions about the mutual relationship between the shapes of two surfaces or curves.

Primljeno: 1987-09-05