

UDK 528.486:513.6

725.826

Originalni znanstveni rad

## ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE ODSUPANJA ELASTIČNIH KALUPA OD ZAKRIVLJENIH STARTNIH LINIJA (EVOLVENTI) NA LAKOATLETSKIM STAZAMA

Miljenko SOLARIĆ — Zagreb\*

### 1. UVOD

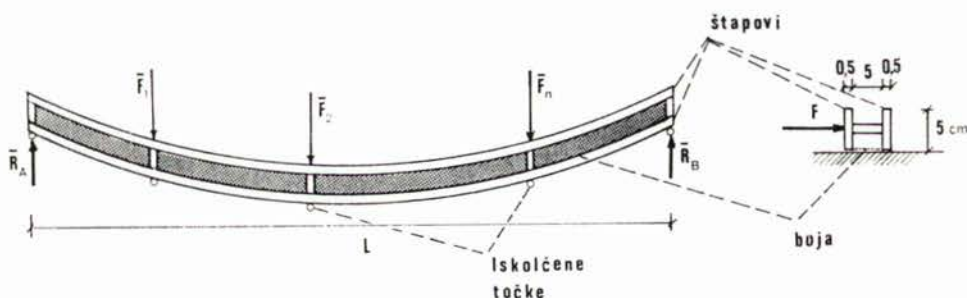
Za iscertavanje zakrivljenih startnih linija (evolventi)\*\* na lakoatletskim stazama mora se prethodno iskolčiti dovoljno velik broj točaka tako da njihova gustoća bude zadovoljavajuća, ([1], [3], [4], [5] i [6]). To onda zahtijeva velik utrošak vremena za iskolčenje, a linija i pored toga velikog napora se obično ne isrceta pravilno.

Zakrivljene startne linije u obliku evolventi kružnice za utrke na 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m, kao i zakrivljene startne linije u obliku evolventi od dijela kružne krivine i dijela pravca za utrke na 3000 m sa zaprekama i 1500 m zadovoljavaju uvjet da su svi trkači bez obzira na startno mjesto ravnopravni, tj. da će natjecatelji postupno preći u prvu stazu i pri tome prevaliti jednako dugi put iz bilo koje točke zakrivljene startne linije počinjali natjecanje u određenoj disciplini.

Znatno manji broj točaka zakrivljenih startnih linija mora se iskolčiti ako se upotrebi elastični kalup. On se može izraditi iz dva tanka štapa pravokutnog presjeka veće duljine izrađenih iz materijala sa dovoljnim modulom elastičnosti ( $E$ ) i momentom inercije poprečnog presjeka ( $I_x$ ). Štapovi su razmaknuti za debljinu linije i taj se razmak fiksira samo na nekoliko mjesta (vidi sl. 1), tj. u iskolčenim točkama u kojima se djeluje sa silama  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  i  $\bar{F}_i$ , gdje je  $i = 1, 2, \dots, n$ . U ovom radu će se odrediti jednadžba elastične linije kalupa za iscertavanje startnih linija na lakoatletskim stazama, jer je to potrebno da bi se moglo odrediti kolika je potrebna gustoća (najmanja udaljenost između) iskolčenih točaka evolvente, a da se pri tome kalup savije sa zadovoljavajućom točnošću u obliku startne linije.

\* Adresa autora: Prof. dr Miljenko Solarić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 41 000 Zagreb, Kačićeva 26. Ovaj rad je djelomično financirao SIZ znanosti SRH.

\*\* Naziv evolventa dolazi od latinske riječi *evolvere* — što znači razviti, razmotati.



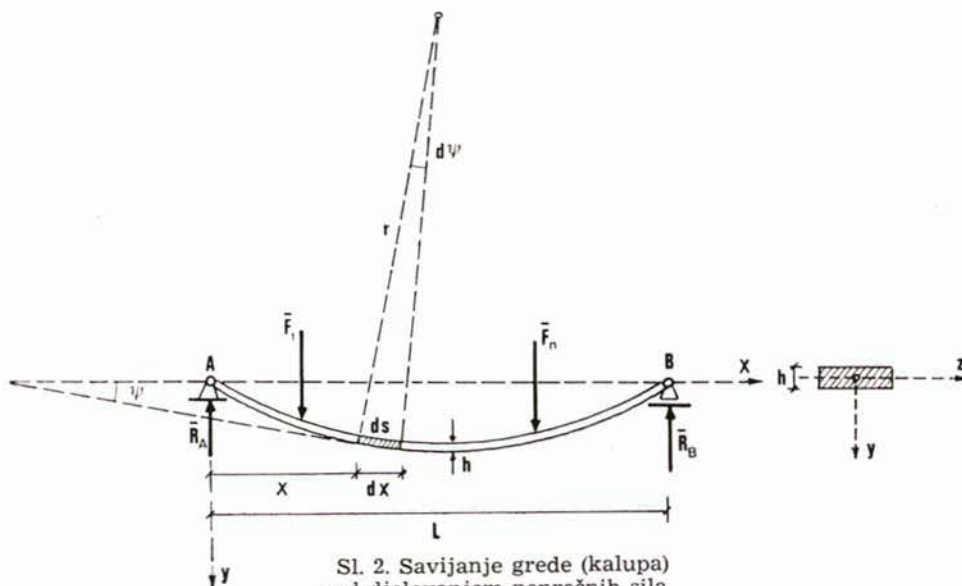
Sl. 1. Tlocrt elastičnog kalupa i njegov poprečni presjek

## 2. ELASTIČNA LINIJA KALUPA ZA ISCRTAVANJE ZAKRIVLJENIH STARTNIH LINIJA — Približno rješenje

Greda će se, kao što se zna iz otpornosti materijala (vidi npr. udžbenik [7]) savinuti pod djelovanjem poprečnih sila u krivulju koja se naziva *elastičnom linijom*. Elastični kalup za iscrtavanje zakrivljenih startnih linija je isto takva tanka greda, te će se ukratko promotriti savijanje tanke grede i to primjeniti na elastični kalup.

Iz otpornosti materijala se zna da diferencijalna jednadžba elastične linije grede za nacrtani koordinatni sustav na sl. 2 glasi:

$$\frac{y'''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = - \frac{M}{E \cdot I_z}, \quad (1)$$



Sl. 2. Savijanje grede (kalupa) pod djelovanjem poprečnih sila

gdje je  $M$  — moment savijanja grede,  $E$  — modul elastičnosti materijala iz kojeg je načinjena greda i  $I_z$  — moment inercije poprečnog presjeka grede u odnosu na os  $z$  koja prolazi kroz njegovo težište. Pri tome je zanemaren utjecaj transverzalnih sila na progibe grede što se može učiniti kad je odnos duljine grede  $L$  i visine njegovog poprečnog presjeka  $h$   $\left(\frac{L}{h}\right)$  veći od 10, a da pogreška u proračunu progiba ne bude veća od 3<sup>o</sup>/<sub>o</sub>. Taj odnos je kod elastičnog kalupa za iscertavanje zakrivljenih startnih linija znatno povoljniji, te se utjecaj transverzalnih sila na progibe kalupa može zanemariti.

Upotreba jednadžbe (1) je otežana, jer je progib određen pomoću ove diferencijalne jednadžbe izražen u ovisnosti od eliptičkog integrala pri čemu je zavisnost progiba od opterećenja nelinearna. Međutim, ako je progib grede mali tada se sa zadovoljavajućom točnošću može uzeti da je

$$\psi \doteq \operatorname{tg}(\psi) = y',$$

odnosno da je

$$1 + y'^2 \doteq 1,$$

pa se diferencijalna jednadžba elastične linije grede može približno napisati u obliku

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I_z}. \quad (2)$$

Ova približna diferencijalna jednadžba elastične linije grede s malim progibom može se primjeniti i kao približna diferencijalna jednadžba elastične linije kalupa za iscertavanje zakrivljenih startnih linija. Naime, detaljna ispitivanja nekih autora pokazala su čak i u slučaju kada su progibi grede jednaki 0,05 od duljine raspona grede da je pogreška u određivanju progiba iz diferencijalne jednadžbe (2) toliko mala da se može zanemariti. Ova primjedba može se primjeniti i na elastični kalup, jer kako se vidi iz sl. 1 i pored velikog općeg savijanja kalupa progib grede između djelujućih sila je relativno mali. Općenito za bilo koje polje »i« (gdje je broj polja  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ) može se prema jednadžbi (2) i sl. 3. napisati diferencijalna jednadžba elastične linije kalupa u obliku

$$y_i' = -\frac{R_A}{E \cdot I_z} \cdot x + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{F_{j-1}}{E \cdot I_z} \cdot (x - L_{j-1}) \quad (3)$$

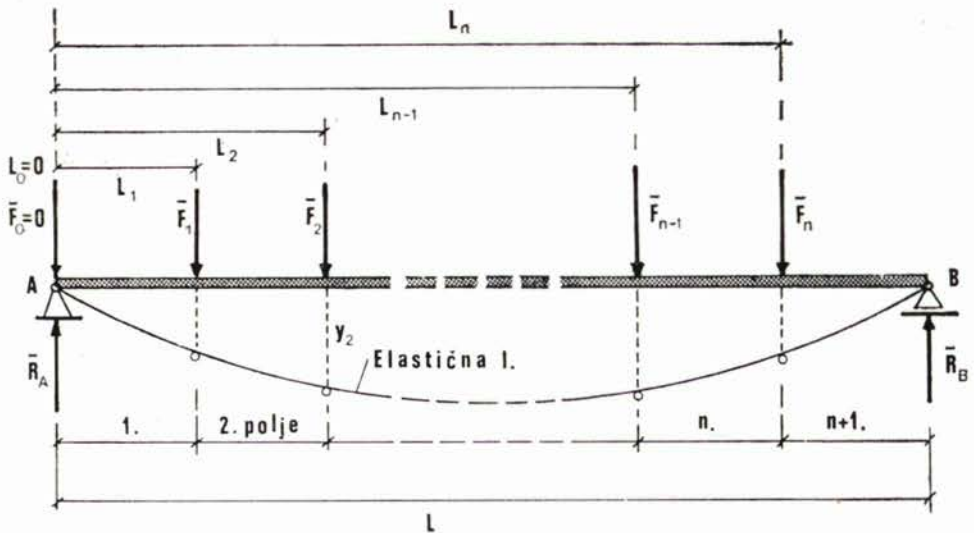
(za  $L_{i-1} < x < L_i$ )

pri tom je za  $j = 1$ ,  $F_0 = 0$  i  $L_0 = 0$ .

Poslije prvog integriranja diferencijalne jednadžbe (3) dobit će se kutovi nagiba tangenta na elastičnu liniju, tj. bit će

$$y_i = -\frac{R_A}{2E \cdot I_z} \cdot x^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{F_{j-1}}{2E \cdot I_z} \cdot (x - L_{j-1})^2 + C_i, \quad (4)$$

(za  $L_{i-1} < x < L_i$ )



Sl. 3. Kalup i njegova elastična linija

gdje su  $C_i$  konstante integracije, koje se mogu odrediti iz početnih uvjeta, da su na granicama između dva susjedna polja kutovi nagiba tangenti na elastičnu liniju jednaki, tj. da je  $y'_i = y'_{i+1}$  za odgovarajući  $x = L_i$ . Tako se dobije da su sve konstante integracije  $C_i$  jednake odnosno da je

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{n+1} = C$$

te se u jednadžbi (4) može napisati umjesto konstante  $C_i$  konstanta  $C$ .

Nakon drugog integriranja dobije se da je progib kalupa izražen jednadžbom

$$y_i = -\frac{R_A}{6E \cdot I_z} \cdot x^3 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{F_{j-1}}{6E \cdot I_z} \cdot (x - L_{j-1})^3 + C \cdot x + D_i, \quad (5)$$

$$(za \ L_{i-1} < x < L_i)$$

gdje su  $D_i$  konstante integracije, koje se mogu odrediti iz početnih uvjeta da su na granicama susjednih polja jednaki progibi elastične linije, tj. da je  $y_i = y_{i+1}$ , za odgovarajuće točke između dva polja, odnosno za  $x = L_i$ .

Tako se dobije da su sve konstante integracije  $D_i$  jednake, tj. da je

$$D_1 = D_2 \dots = D_{n+1} = D$$

te se u jednadžbi (5) može napisati umjesto  $D_i$  konstanta  $D$ .

Konstante integracije  $D$  i  $C$  mogu se odrediti iz početnih uvjeta da su progibi kalupa na početku u točki A i na kraju u točki B jednaki nula. Ako se uvrti u jednadžbu (5) da je  $i = 1$ , dobit će se iz uvjeta da je na početku kalupa u točki A progib nula  $y_1 = 0$  (za  $x = 0$ ) druga konstanta integracije



$$D = 0.$$

Uvrsti li se u jednadžbu (5) da je  $i = n + 1$  dobit će se iz uvjeta da je na kraju kalupa u točki B progib nula  $y_{n+1} = 0$  (za  $x=L$ ) prva konstanta integracije

$$C = \frac{R_A}{6E \cdot I_z} \cdot L^2 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{F_{j-1}}{6E \cdot I_z \cdot L} \cdot (L - L_{j-1})^3. \quad (6)$$

Poslije uvrštenja jednadžbe (6) u (5) dobije se da je *jednadžba elastičnih linija za i-to polje* izražena formulom:

$$y_i = \frac{R_A}{6E \cdot I_z} (L^2 \cdot x - x^3) + \sum_{j=1}^i \frac{F_{j-1}}{6E \cdot I_z} \cdot (x - L_{j-1})^3 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{F_{j-1} \cdot x}{6E \cdot I_z \cdot L} (L - L_{j-1})^3$$

(za  $L_{i-1} < x < L_i$ )

Dakle, pomoću jednadžbi (7) moći će se odrediti progib kalupa u bilo kojoj njegovoj točki. To znači da će se računanjem po jednadžbama (7) moći odrediti odstupanje iscrtane linije pomoću elastičnih kalupa od zakrivljenih startnih linija u obliku evolventi kružnice ili evolventi od dijela pravca i dijela kružnice koje se trebaju iscrtati na atletskoj stazi. Zbog toga će se razloga u slijedećem poglavlju ukratko izložiti o jednadžbama evolventi.

### 3. JEDNADŽBE ZAKRIVLJENIH STARTNIH LINIJA U OBLIKU EVOLVENTI KRUŽNICE ILI U OBLIKU EVOLVENTE OD DIJELA PRAVCA I DIJELA KRUŽNICE

Startne linije u disciplinama u kojima natjecatelji postupno odmah iza starta prelaze u prvu stazu su zakrivljene linije. Naime, da bi svi takmičari u određenoj disciplini bili ravnopravni bez obzira iz koje točke startne linije počimali natjecanje, tj. da svi trkači za vrijeme trke pređu jednako dugi put zakrivljene startne linije moraju biti *evolvente trajektorije trkača u prvoj stazi*. Jednadžbe tih evolventi su izvedene u radovima [4], [5] i [6], te će se ovdje samo navesti bez posebnog objašnjenja.

Jednadžba evolvente kružnice radijusa  $R_i$  u polarnom koordinatnom sustavu sa ishodištem u središtu kružnice (C), tj. trajektorije (putanje) trkača u prvoj stazi glasi:

$$\beta_i = \left[ 2 \cdot \pi - \sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} + \arctg \left( \sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} \right) \right] \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad (8)$$

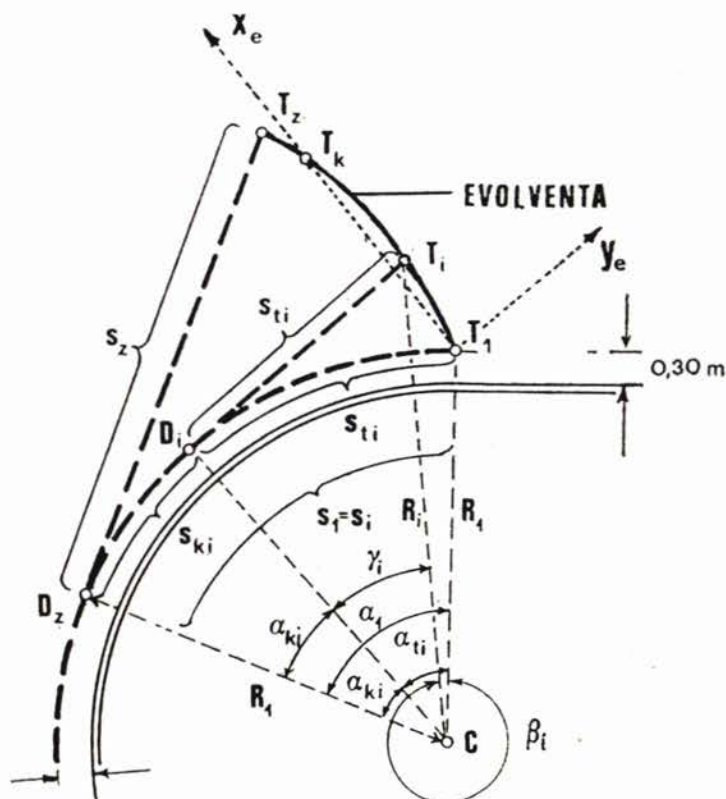
gdje je:

$R_1$  — radijus trajektorije trkača u prvoj stazi

$R_i$  — udaljenost startne točke  $T_i$  od središta kružne krivine (C)

$\beta_i$  — polarni kut

Ako se ovaj polarni koordinatni sustav ( $\beta$ ,  $R$ ) s ishodištem u točki C transformira u pravokutni koordinatni sustav ( $Y$ ,  $X$ ) s ishodištem u točki  $T_1$  i zatim zarotira u pravokutni koordinatni sustav ( $y_e$ ,  $x_e$ ) i ishodištem u točki  $T_1$ , tako da os  $x_e$  prolazi kroz proizvoljno odabranu točku  $T_k$  dobit će se koordinatni sustav koji odgovara koordinatnom sustavu ( $y$ ,  $x$ ) elastičnog kalupa za iscrtavanje startnih linija (vidi sl. 4 i sl. 2).



Sl. 4. Startna linija za utrke na 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m, te dio startne linije za utrku na 1500 m.

Jednadžba evolvente nastale odmatanjem dijela pravca i dijela kružne krivine u polarnom koordinatnom sustavu sa ishodištem u središtu kružnice (C) glasi:

$$\beta_i = \left[ \arctg \left( \frac{L_G + s_i}{R_1} \right) - \frac{s_i}{R_1} \right] \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad (9)$$

$$U_i = \sqrt{R_1^2 + (L_G + s_i)^2},$$

gdje je:

$L_G$  — duljina pravca za trkača u prvoj stazi

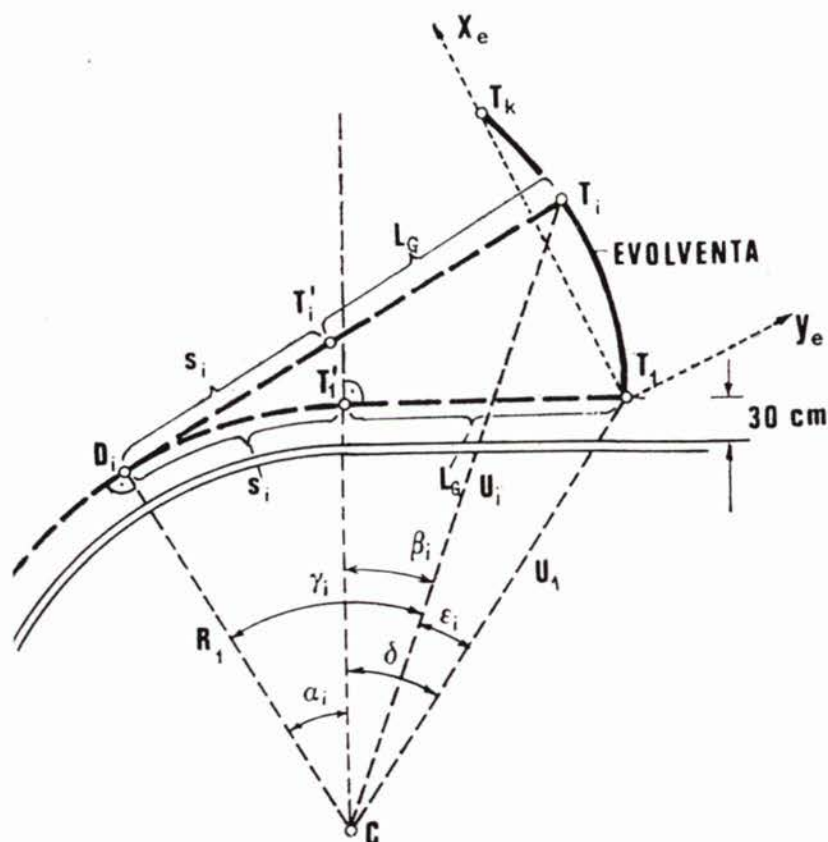
$R_1$  — radijus trajektorije trkača u prvoj stazi

$s_i$  — duljina kružnog dijela staze koji prevali trkač u prvoj stazi  $T_1'D_i$ , tj. do mjesta gdje u prvu stazu ulazi trkač koji je startao u točki  $T_1$ .

$\beta_i$  — polarni kut za točku  $T_1$  evolvente

$U_i$  — udaljenost točke  $T_1$  evolvente od središta kružne krivine C.

Ovaj polarni koordinatni sustav ( $\beta$ ,  $U$ ) može se, također, kao i u prethodnom slučaju transformirati u pravokutni koordinatni sustav ( $y_e$ ,  $x_e$ ) (vidi sl. 5), tako da os  $x_e$  prolazi kroz točke  $T_1$  i  $T_k$ .



Sl. 5. Startna linija za utrke na 3000 m sa zaprekama, kao i za dio startne linije za utrku na 1500 m, tj. evolventa od dijela pravca  $L_G$  i dijela kružne krivine  $s_i$ .

#### 4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE RAZLIKE IZMEĐU PROGIBA ELASTIČNOG KALUPA $y_i$ I KOORDINATA $y_{ei}$ ZA ODGOVARAJUĆE TOČKE EVOLVENTE

Da bi se elastični kalup savinuo u obliku zakrivljene startne linije (evolvente) i da bi on prošao kroz iskolčene točke na njega se u njima mora djelovati s odgovarajućim silama  $R_A$ ,  $R_B$  i  $F_i$ . Veličine tih sila mogu se odrediti iz sistema:

- »n« linearnih jednadžbi (7), tj. jednadžbi progiba kalupa za točke u kojima djeluju sile  $F_i$  i
- jednadžbe momenta savijanja grede u točki B

$$\sum M_B = R_A \cdot L - \sum_{i=1}^n F_i \cdot (L - L_i) = 0 \quad (10)$$

Zbog tih razloga moraju se najprije po jednadžbi (8) ili (9) odrediti koordinate za polarno iskolčenje neke točke »i« startne linije. Međutim, da bi se dovelo u vezu koordinate iskolčene točke evolvente i odgovarajućih progiba elastičnog kalupa moraju se polarne koordinate  $(\beta_j, R_j)$  transformirati u pravokutni koordinatni sustav  $(y_{ei}, x_{ei})$  (vidi sl. 2, sl. 4 i sl. 5), kao što je to navedeno u 3. poglavlju.

Očito je da će u sistemu »n« linearnih jednadžbi (7) i jednadžbe (10) biti nepoznanice:  $\frac{R_A}{6E \cdot I_z}$  i  $\frac{F_{j-1}}{6E \cdot I_z}$ , gdje indeks j ide od 1 do n + 1, a pri tome je  $F_0 = 0$ . To znači da će biti n + 1 nepoznanica i isto toliko nezavisnih linearnih jednadžbi, te se iz sistema jednadžbi (7) i jednadžbe (10) mogu odrediti sve ove nepoznanice.

Zatim će se odabrati točke unutar polja za koje će se najprije izračunati koordinate  $y_{ei}$  i  $x_{ei}$  evolvente trajektorije trkača u prvoj stazi (startne linije), a iza toga će se za taj isti  $x_{ei} = x_i$  izračunati veličina progiba  $y_i$  pomoću jednadžbe (7) za polje u kojem se nalazi odabrana točka. Pri tome se u jed-

nadžbu (7) uvrsti izračunata n + 1 nepoznanica:  $\frac{R_A}{6E \cdot I_z}$  i  $\frac{F_{j-1}}{6E \cdot I_z}$ .

Poslije toga se mogu naći razlike  $y_{ei} - y_i$  i ustanoviti da li je dovoljna gustoća iskolčenih točaka zakrivljene startne linije ili će se ona morati povećati. Naime, ukoliko bi razlika  $|y_{ei} - y_i|$  bila veća od dozvoljenog odstupanja na bilo kojem mjestu tada bi se moralo smanjiti razmak između iskolčenih točaka evolvente.

#### LITERATURA

- [1] Atletski savez Jugoslavije: Pravila za atletska takmičenja, »Sportska tribina«, Zagreb, 1977.
- [2] Blanuša D.: Viša matematika, I dio, drugi svezak; Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.
- [3] Rieke H.: Vermessung der 400 m — Kreisbogen — Laufbahn mit Messband und Theodolit, südwestdeutsche Verlagsdruckerei G. Hornberger, 6757 Waldfishbach — Burgalben/Pfalz.



- [4] Solarić M., Capek B.: Računanje elemenata iskolčenja zakrivljenih startnih linija (evolventi kružnica) za utrke na 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m. Geodetski list, 1985, 10—12, 275—284.
- [5] Capek B. i Solarić M.: Računanje elemenata iskolčenja zakrivljenih startnih linija za utrke na 3000 m sa zaprekama i 1500 m. Geodetski list 1987, 4—6, 135—141.
- [6] Solarić M. i Capek B.: Die Berechnung von Absteckungselementen für Kreisbogen — Laufbahnen. Vermessungswesen und Raumordnung, (pripremljeno za tisak).
- [7] Timošenko S.: Otpornost materijala, I dio, prevod s engleskog. Građevinska knjiga, Beograd, 1965.

### SAŽETAK

Za iscrtavanje zakrivljenih startnih linija (evolventi) na lakoatletskim stazama vrlo pogodno je koristiti elastične kalupe. Naime, ako se upotrebe elastični kalupi za bojenje zakrivljenih startnih linija tada se ne moraju iskolčiti tako gusto točke evolventi.

U ovom radu su izvedene formule za računanje progiba elastične linije kalupa, a i dat je algoritam po kojem se mogu izračunati razlike između evolvente i progiba kalupa. U slijedećem radu učinit će se numerička analiza dobivenih rezultata i predložiti odgovarajuća rješenja, tj. kolika je neophodna gustoća iskolčenih točaka zakrivljenih startnih linija u obliku evolventi trajektorija trkača u prvoj stazi, kad se one obilježavaju pomoću elastičnih kalupa.

### ZUSAMMENFASSUNG

Für das Kennzeichnen den gebogenen Startlinien — Evolventen auf den Leichtathletikbahnen ist es sehr günstig die elastischen Schablonen anzuwenden. Nämlich, wenn man die elastischen Schablonen für den oben genannten Zweck anwendet, es ist nicht notwendig so dicht wie üblich die Punkte der Evolvente abzustecken.

In diesem Aufsatz sind die Näherungsformel für die Berechnung der Durchbiegung der elastischen Schablone abgeleitet, und das Algorjtmus für die Berechnung den Differenzen zwischen der Evolvente und der Durchbiegung der Schablone angegeben. Im Aufsatz der nächstens erscheint wird die numerische Analyse den erhaltenen Ergebnisse und ein Vorschlag für die geeignetste Lösung angegeben, d.h. wie dicht müssen die Punkte der Evolvente abgesteckt sein, wenn man das Kennzeichnen mit Hilfe der elastischen Schablone durchgeführt.

Primljeno: 1987-02-19