UDK 528.142
Originalni znanstven rad

PRIMENA POSREDNOG IZRAVNANJA KADA SE KORISTE KVADRATI MERNIH VELIČINA (DUŽINA)

Krsta VRAČARIĆ*

Ovim radom ukazaće se da se pri izravnanju posrednih merenja mogu koristiti kvadrati kao slobodni članovi a da se pri tome dobijaju nepromenjene linearne vrednosti nepoznatih.

Pri izravnanju, rezultati merenja smatraju se slučajnim veličinama koje iz izravnanja dobijaju odgovarajuću popravku. Međutim, moguće je da se iz izravnanja određuju popravke kvadrata rezultata merenja. Ovo je bitno istaći zato što se kod pojedinih zadataka iz oblasti regresione analize pojavljuju kvadrati slučajnih veličina pa nije potrebno vršiti nikakvu linearizaciju.

ODREĐIVANJE POPRAVAKA REZULTATA MERENIH VELIČINA

Za svaki rezultat merenja (l_i), kako je poznato, može se napisati po jedna jednačina oblika

$$l_i + v_i = F_i(X, Y, Z, \ldots T) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

odnosno preko funkcije (F_i) uspostavlja se veza između rezultata merenja (l_i) i nepoznatih (X, Y, Z, . . . T).Oblik funkcije F_i zavisi od toga na koja se merenja primenjuje posredno izravnanje. U geodeziji se, kako je poznato,, mere visinske razlike, dužine i pravci (uglovi). Prema tome, funkcije veze za ove tri vrste veličina imaće sledeće oblike:

a) Za visinske razlike

Popravljena vrednost visinske razlike ($\Delta H_i + V_i$) između dveju tačaka dobija se kao razlika najverovatnijih vrednosti njihovih visina

$$\Delta H_i + V_i = H_j - H_k. \tag{2}$$

* Adresa autora: Prof. dr Krsta Vračarić, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta, Beograd, Bulevar revolucije 73.

Odgovarajuće jednačine popravaka biće

$$V_i = \delta H_j - \delta H_k + f_i; \qquad f_i = (H_{j_0} - H_{k_0}) - \Delta H_i. \tag{3}$$

Funkcije veze na desnoj strani jednačine (2) su linearne pa su nepotrebna bilo kakva njihova uprošćenja.

b. za dužine

Popravljena vrednost dužine $(S_i + V_i)$ između dveju tačaka dobija se na osnovu razlika najverovatnijih vrednosti njihovih koordinata

$$S_i + V_i = \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2} \tag{4}$$

Odgovarajuće jednačine popravaka imaće izgled

$$V_i = a_{jk}\,\delta x_j + a_{kj}\,\delta x_k + b_{jk}\,\delta y_j + b_{kj}\,\delta y_k + f_i; \tag{5}$$

$$f_i = S_{i_0} - S_i$$

gde je:

$$a_{jk} = -a_{kj} = \cos \nu_k^j$$
$$b_{jk} = -b_{kj} = \sin \nu_k^j \tag{6}$$

Funkcije veze (4) nisu linearne nego se njihova linearizacija ostvaruje razvijanjem u Tajlerov red u blizini približnih vrednosti traženih tačaka.

c. Za pravce

Najverovatnija vrednost horizontalnog pravca opažanog sa jedne tačke na drugu može se izraziti u funkciji koordinata krajnjih tačaka

$$\alpha_i + V_i = Z + \operatorname{arctg} \frac{Y_j - Y_k}{X_j - X_k} \tag{7}$$

čijom se linearizacijom dobijaju jednačine popravaka

$$V_i = a_{jk}\,\delta x_j + b_{jk}\,\delta t y_j + a_{kj}\,\delta x_k + b_{kj}\,\delta y_k + \delta z + f_i \tag{8}$$

$$f_i = \nu_{j_0}^k + z_0 - \alpha_i$$

gde je:

$$a_{jk} = -a_{kj} = -\frac{\sin \nu_{k_0}^j}{S_0}$$

$$b_{jk} = -b_{kj} = \frac{\cos \nu_{k_0}^j}{S_0} \tag{9}$$

ODREĐIVANJE POPRAVAKA KVADRATA MERENIH VELIČINA

Prilikom određivanja koordinata tačaka lučnim presekom koriste se samo merena rastojanja. Jednačine popravaka imaće izgled (5). Rezultati izravnanja neće se promeniti ako se jednačine popravaka (5) pomnože proizvoljnim brojevima, naprimer $(S_{i_0} + S_i)$. Posle množenja jednačina popravaka (5) vrednostima $(S_{i_0} + S_i)$ dobiće se izmenjene jednačine popravaka

$$\overline{V}_i = (S_{i_0} + S_i) \cos \nu_k^j \delta x_j + (S_{i_0} + S_i) \cos \nu_j^k \delta x_k + \\ + (S_{i_0} + S_i) \sin \nu_k^j \delta y_j (S_{i_0} + S_i) \sin \nu_j^k \delta y_k + S_{i_0}^2 - S_i^2$$

tj.

$$\overline{V}_i = 2 \Delta X_{kj} \delta X_j + 2 \Delta X_{jk} \delta X_k + 2 \Delta Y_{kj} \delta Y_j + 2 \Delta y_{jk} \delta Y_k + S_{i_0}^2 - S_i^2 \quad (10)$$

jer je

$$S_{i_0}^2 + S_i \approx 2S_i$$

gde je:

$$\overline{V}_i = V_i (S_{i_0} + S_i) \quad (11)$$

Težine ovako dobijenih jednačina popravaka (10) mogu se odrediti kao težine njihovih slobodnih članova (f_i)

$$f_i = S_{i_0}^2 - S_i^2$$
$$m_{f_i}^2 = 4 S_i^2 m_{S_i}^2 \quad (12)$$

odnosno

$$\frac{1}{P_{f_i}} = 4 S_i^2 \frac{1}{P_{S_i}}$$
$$\frac{1}{P_{f_i}} = S_i^2 \frac{1}{P_{S_i}} \quad (13)$$

ili

$$p_{f_i} = \frac{1}{S_i^2} \cdot P_{S_i} = p_{\overline{v}_i} \quad (14)$$

jer se pri proporcionalnom menjanju težina dobijaju isti rezultati izravnanja.

Umesto linearnih vrednosti merenih dužina mogu se koristiti njihovi kvadrati. Tada će funkcije veze imati izgled

$$S_i'^2 = S_i^2 + V_{S_i^2} = (X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2 \quad (15)$$

Odgovarajuće jednačine popravaka, posle razvijanja funkcije (15) u Tajlorov red, i zadržavanja samo prva dva člana reda biće

$$V_{S_i^2} = 2 (X_i - X_k)_o \cdot \delta X_j + 2 (X_k - X_j)_o \cdot \delta X_k + 2 (Y_j - Y_k)_o \cdot \delta Y_j + \\ + 2 (Y_k - y_j)_o \delta Y_k + S_{i_0}^2 - S_i^2 \quad (16)$$

odnosno

$$V_{S_i^2} = 2 \Delta X_{jk} \cdot \delta X_j + 2 \Delta X_{kj} \cdot \delta Y_j + 2 \Delta Y_{kj} \delta Y_k + S_i^2 - S_{i_0}^2. \quad (17)$$

Upoređenjem izraza (17) sa izrazom (10) lako se može zaključiti da se radi o istim jednačinama popravaka. Prema tome, umesto linearnih vrednosti rastojanja S_i mogu se koristiti vrednosti njihovih kvadrata S_i^2. Pri tome se težine u jednačinama popravaka moraju odrediti prema izrazu (14).

Koristeći jednačine popravaka (17) dobiće se linearne vrednosti nepoznatih (δx, δy) i popravke kvadrata merenih dužina. Popravke linearnih vrednosti merenih dužina mogu se dobiti polazeći od izraza (11).

$$\bar{V}_{S_i} = V_{S_i}(S_i + S_{i_0}) \approx 2 \cdot S_i \cdot V_{S_i} \tag{18}$$

odakle se dobija

$$V_{S_i} = \frac{\bar{V}_{S_i}}{2 \cdot S_i} = \frac{\bar{V}_{S_i}}{2 \cdot S_i} \tag{19}$$

Ovim je pokazano da se, pri izravnanju, umesto linearnih vrednosti merenih rastojanja mogu koristiti njihovi kvadrati pod uslovom da se težine pravilno određuju prema formulama (14).

Radi ilustracije prethodnog tvrđenja urađeno je nekoliko numeričkih primera.

Na početku su dati podaci za računanje koordinata tačke određene lučnim presekom i to: Koordinate datih tačaka, merena rastojanja i skica.

T_n	Y	X	S
o1	6 900	7 050	111,75
o2	7 209	7 300	365,70
o3	7 060	6 800	208,80

1. Primer

Izvršiti izravnanje koordinata tačke određene lučnim presekom, koristeći linearne vrednosti merenih rastojanja, i vrednost težina $p_i = 1$.

Približne vrednosti koordinata i dužina

$$T_o : Y_o = 7\,000 \qquad X = 7\,000$$

$$S_{1_0} = 111{,}80; \qquad S_{2_0} = 365{,}62; \qquad S_{3_0} = 208{,}81$$

Matrica jednačina popravaka, vektor odstupanja i težina

$$A = \begin{Vmatrix} -0{,}447213 & 0{,}894428 \\ -0{,}820515 & -0{,}571625 \\ 0{,}957827 & -0{,}287346 \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} 5\text{ cm} \\ -8 \\ -1 \end{Vmatrix}; \quad p = \mathrm{dig} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 1{,}790677 & -0{,}206201 \\ -0{,}206201 & 1{,}209324 \end{Vmatrix}; \quad n = \begin{Vmatrix} 0{,}052859 \\ 0{,}087578 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}569532 & 0{,}097127 \\ 0{,}097127 & 0{,}843469 \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} -0{,}038616 \text{ m} \\ -0{,}079003 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka

$$V = \begin{Vmatrix} -0{,}339 \text{ cm} \\ -0{,}316 \\ -0{,}429 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti

$$\begin{aligned} [pvv] &= 0{,}3988 \\ m_o &= \pm\, 0{,}6315 \\ m_x &= \pm\, 0{,}477 \quad \text{cm} \\ m_y &= \pm\, 0{,}579 \end{aligned}$$

2. Primer

Na osnovu podataka datih u primeru 1. izvršiti izravnanje koordinata tražene tačke koristeći kvadrate merenih rastojanja.
Matrica jednačina popravaka, slobodnih članova i težina

$$A = \begin{Vmatrix} -100 & 200 \\ -600 & -418 \\ 400 & -120 \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} 11{,}1775 \\ -58{,}5065 \\ 4{,}1761 \end{Vmatrix}; \quad P = \begin{Vmatrix} 0{,}800765 \\ 0{,}074774 \\ 0{,}229371 \end{Vmatrix}$$

Matrica normalnih jednačina i slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 71625{,}6567 & -8271{,}8192 \\ -8271{,}8192 & 48398{,}3320 \end{Vmatrix}; \quad n = \begin{Vmatrix} 2192{,}9116 \\ 3503{,}7857 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} -0{,}00001424 & 0{,}000024342 \\ 0{,}0000024342 & 0{,}000021078 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} -0{,}038622 \text{ m} \\ -0{,}078996 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka

$$\overline{V} = \begin{Vmatrix} -0{,}7595 \text{ m} \\ -2{,}3130 \\ -1{,}7932 \end{Vmatrix} \qquad V = \frac{\overline{V}}{2S} = \begin{Vmatrix} -0{,}339 \text{ cm} \\ -0{,}316 \\ -0{,}429 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti:

$[pvv] = 1{,}5995$ $\quad m_o = \pm\, 1{,}2647$ $\quad m_x = \pm\, 0{,}477$ cm $\quad m_y = \pm\, 0{,}580$ cm

Primeri 1 i 2 numeričkim podacima pokazuju da se pri izravnanju dobijaju isti rezultati u slučaju merenja jednake tačnosti.

3. Primer

Na osnovu podataka iz prvog primera izvršiti izravnanje koordinata tražene tačke, koristeći linearne vrednosti merenih rastojanja pod uslovom da se težine merenih rastojanja računaju po formuli $p_{s_i} = 1/S_i$. Matrica A i vektor f isti su kao u primeru 1. dok će vektor težina (p) biti

$$p^* = \| 0{,}894 \quad 0{,}273 \quad 0{,}479 \|$$

Matrica normalnih jenačina i vektor slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 0{,}802451 & -0{,}361501 \\ -0{,}361501 & 0{,}844779 \end{Vmatrix}; \quad n = \begin{Vmatrix} 0{,}002527 \\ 0{,}051148 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 1{,}54379 & 0{,}66062 \\ 0{,}66062 & 1{,}46644 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} -0{,}03769 \text{ m} \\ -0{,}07667 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3{,}769 \text{ cm} \\ -7{,}667 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka

$$V = \begin{Vmatrix} -0{,}00172 \text{ m} \\ -0{,}00524 \\ -0{,}00407 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}172 \text{ cm} \\ -0{,}524 \\ -0{,}407 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti:

$[pvv] = 0{,}18075 \qquad m_o = \pm 0{,}425 \qquad m_x = \pm 0{,}528 \text{ cm} \qquad m_y = \pm 0{,}515 \text{ cm}$

4. Primer

Na osnovu podataka iz prvog primera izvršiti izravnanje koordinata tražene tačke koristeći kvadrate merenih rastojanja pod uslovom da se težine merenih rastojanja računaju po formuli $p_{s_i} = 1/S_i$, te težina odstupanja $f_i = S^2_{i_0} - S^2_i$, po formuli $p_{f_i} = 1/S^3_i$. Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova isti su kao u primeru 2. dok je vektor težina

$$p^* = \| 0{,}716568 \quad 0{,}020447 \quad 0{,}0109852 \|.$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 32102{,}8662 & 14476{,}2078 \\ -14476{,}2078 & 33817{,}1352 \end{Vmatrix} \quad n = \begin{Vmatrix} 100{,}3085 \\ 2046{,}8705 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}0000386011 & 0{,}0000165421 \\ 0{,}0000165241 & 0{,}0000366443 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} -0{,}03769 \text{ m} \\ -0{,}07666 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -3{,}769 \text{ cm} \\ -7{,}666 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka

$$\overline{V} = \begin{Vmatrix} -0{,}386 \\ -3{,}843 \\ -1{,}702 \end{Vmatrix}; \quad V = \frac{\overline{V}}{2S} = \begin{Vmatrix} -0{,}00173 \\ -0{,}00525 \\ -0{,}00408 \end{Vmatrix}$$

Ocena tačnosti

$[pvv] = 0{,}7270 \qquad m_0 = 0{,}8526 \qquad m_x = \pm 0{,}529\ \text{cm}; \qquad m_y = \pm\ 0{,}516\ \text{cm}$

Ovim numeričkim primerima potvrđeno je ono što je teorijski prethodno dokazano, da se u izravnanju, umesto linearnih vrednosti merenih rastojanja, mogu koristiti njihovi kvadrati ali da se pri tome vodi računa, da se težine u jednačinama popravaka moraju odrediti prema izrazu (14).

Prethodna razmatranja (o korišćenju kvadrata rastojanja) mogu se primeniti i kada se vrši izravnanje raznorodnih veličina (dužina i uglova-pravaca).

U posrednom izravnanju često učestvuju raznorodne veličine, npr. rastojanja i pravci (uglovi). Za svaku merenu veličinu formira se po jedna jednačina popravaka (5) ili (8). Jednačine popravaka (5) mogu se množenjem transformisati na oblik (17) tako da se odnose na kvadrate merenih veličina (dužina).

Kada u izravnanju učestvuju raznorodne veličine (pravci i dužine), težine se računaju prema

$$p_p = \frac{k}{m_\beta^2} = \frac{m_\beta^2}{m_\beta^2} = 1$$

$$p_s = \frac{m_\beta^2}{m_s^2} \tag{20}$$

Pri tome je važno da budu usaglašene dimenzije faktora u jednačinama popravaka za pravce sa dimenzijama veličina koje učestvuju u jednačinama popravaka dužina (težine, slobodni članovi i dr.). Na primer, ako su dimenzije faktora $\left[\frac{''}{\text{cm}}\right]$ tada je $P_s = \frac{m_\beta^2\,['']}{m_s^2\,[\text{cm}]}$. Kada u izravnanju učestvuju pravci i kvadrati rastojanja takođe je potrebno voditi računa o dimenzijama. Naprimer, ako su dimenezije faktora u jednačinama popravaka za pravce $\left[\frac{''}{\text{cm}}\right]$ tada se te dimenzije moraju uvažavati u jednačinama popravaka za kvadrate dužina (20), tj. treba izražavati.

$$2\,\Delta X\,[\text{cm}]; \qquad 2\,\Delta Y\,[\text{cm}]; \qquad f = S_0^2 - S^2\,[\text{cm}]^2$$

$$P_i = P_S \frac{1}{2\,S_i^2\,[\text{cm}]} = \left[\frac{''}{\text{cm}}\right] \cdot \frac{1}{2\,[\text{cm}]^2}$$

Ako se o ovome ne bi vodilo računa dobili bi se pogrešni rezultati izravnavanja.

Za ilustraciju prethodnog objašnjenja obrađen je numerički primer izravnanja merenih dužina i pravaca i to na dva načina:

a. kada se koriste linearne vrednosti dužina i

b. kada se koriste njihovi kvadrati

5. *Primer*

Sračunati koordinate tačke o T na osnovu merenih rastojanja i pravaca. (Dati podaci i neki podaci ranijih računanja prikazani su u tabeli)

Tn	Y	X	α_i	ν_o	S_i	m_s	S_o	p
o1	6 900	7 050	0°00′00″	296 33 54	111,75	5cm	111,80	4,000
o2	7 209	7 300	98 18 00	34 51 49	365,70	12	365,62	0,694
o3	7 060	6 800	226 44 06	163 18 03	208,80	8	208,81	1,562
T_o	7 000	7 000						

ako je srednja greška opažanog pravca $m_p = 10''$

a. Kada se koriste linearne vrednosti rastojanja

Matrica jednačinna popravaka, vektor slobodnih članova i težina

$$A = \begin{Vmatrix} 0{,}447213 & -0{,}894428 & 0 \\ 0{,}820515 & 0{,}571625 & 0 \\ -0{,}957827 & 0{,}287346 & 0 \\ -16{,}501709 & -8{,}250836 & 1 \\ 3{,}224829 & -4{,}628947 & 1 \\ 2{,}838444 & 9{,}461526 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{Vmatrix}; \quad p = \begin{Vmatrix} 4{,}000 \\ 0{,}694 \\ 1{,}562 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$a_{i_s} = \cos \nu_T^i \qquad b_{i_s} = \sin \nu_T^i; \qquad a_{i_p} = \frac{\sin \nu_{T_0}^i}{S_{i_0}} \rho''; \qquad b_{i_p} = \frac{-\cos \nu_{T_0}^i}{S_{i_0}}$$

$$Z_0 = 63°26'06'' \qquad \alpha_{i_0} = \begin{Vmatrix} 0° \ 00' \ 00'' \\ 98 \ \ 17 \ \ 55 \\ 226 \ \ 44 \ \ 09 \end{Vmatrix}$$

Matrica normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 293{,}4629458 & 146{,}3769434 & -10{,}438436 \\ 146{,}3769434 & 182{,}5796639 & -3{,}418257 \\ -10{,}438434 & -3{,}418257 & 3 \end{Vmatrix}; \quad n = \begin{Vmatrix} -4{,}716178054 \\ 30{,}91592545 \\ -2 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor slobodnih članova

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}00641326 & -0{,}00482680 & 0{,}01681507 \\ -0{,}00482680 & 0{,}00922923 & -0{,}00627879 \\ 0{,}01681507 & -0{,}00627879 & 0{,}384686826 \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} 0{,}213101 \\ -0{,}320652 \\ 1{,}042791 \end{Vmatrix}$$

$$v = Ax + f = \begin{Vmatrix} 5{,}38 \text{ cm} \\ -8{,}01 \text{ cm} \\ 0{,}70 \text{ cm} \\ 0{,}''17 \\ -1{,}''79 \\ 1{,}''61 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} V_s \\ \dots \\ V \end{Vmatrix}$$

b. Kada se koriste kvadrati merenih rastojanja

Matrica jednačina popravaka

$$\bar{a}_{i_s} = 2(X_j - X_0); \quad \bar{b}_{i_s} = 2(Y_j - Y_0); \quad \bar{a}_{i_p} = a_{i_p}; \quad \bar{b}_{i_p} = b_{i_p}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 10000 & -20000 & 0 \\ 60000 & 41800 & 0 \\ -40000 & 12000 & 0 \\ -16{,}501709 & -8{,}250836 & 1 \\ 3{,}224829 & -4{,}628947 & 1 \\ 2{,}838444 & 9{,}461526 & 1 \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} 111{,}775 \\ -585\,056 \\ 41\,761 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{Vmatrix};$$

$$p = \begin{Vmatrix} 8.0076 \cdot 10^{-9} \\ 1.2982 \cdot 10^{-9} \\ 8{,}9598 \cdot 10^{-9} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \frac{m_\beta^2}{4\,S_i^2 \cdot m_s^2}$$

Matrira normalnih jednačina i vektor slobodnih članova

$$N = \begin{Vmatrix} 293{,}4640006 & 146{,}3752506 & -10{,}43836 \\ 146{,}3752506 & 182{,}5826325 & -3{,}418257 \\ -10{,}438436 & -3{,}418257 & 3 \end{Vmatrix}; \quad n = \begin{Vmatrix} -4{,}708524 \\ 30{,}904420 \\ -2 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica i vektor nepoznatih

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}00641306 & -0{,}00482651 & 0{,}01681470 \\ -0{,}00482651 & 0{,}00922881 & -0{,}00627825 \\ 0{,}01681470 & -0{,}00627825 & 0{,}38468617 \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} 0{,}212986 \\ -0{,}320493 \\ 1{,}042570 \end{Vmatrix}$$

Vektor popravaka

$$V = Ax + f = \begin{Vmatrix} \overline{V_s} \\ V \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 120314{,}72 \\ -585673{,}45 \\ 29395{,}64 \\ 0{,}''17 \\ -1{,}''79 \\ 1{,}''61 \end{Vmatrix} \quad V_s = \frac{\overline{V_s}}{2S} = \begin{Vmatrix} 5{,}38 \\ -8{,}01 \\ 0{,}70 \end{Vmatrix}$$

Kako se vidi rezultati izravnanja su identični.

U geodeziji se pojavljuju odstupanja (f) koja nastaju kao rezultat zbira većeg broja istorodnih veličina. Pojedina odstupanja su posledica delovanja više izvora grešaka koje istovremeno utiču na rezultate merenja. Ti izvori grešaka najčešće prouzrokuju greške: slučajnog karaktera, sistematske srazmerne merenoj veličini (tzv. progresivne sistematske greške), konstantne sistematske greške i dr. Posmatrajući odstupanja f pojedinačno, ne može se doneti zaključak o tome koliko koji izvor grešaka opterećuje rezultate merenja.

Međutim, ako se raspolaže sa većim brojem odstupanja može se čak utvrditi koliko je uticaj pojedinih izvora grešaka na merene veličine.

Za neka odstupanja f može se odrediti izraz njegove srednje greške, koji će, sažeto napisan, imati izgled.

$$m^2_{f_i} = a_i \eta^2 + b_i \lambda^2 + c_i \lambda_0^2 \tag{21}$$

gde je: η — uticaj slučajnih grešaka merenja

λ — uticaj progresivne sistematske greške

λ_0 — uticaj konstantne sistematske greške

a, b i c — su koeficijenti koji zavise od vrste radova, čija se vrednost može unapred odrediti.

Odstupanja f predstavljaju istinite greške, na osnovu kojih se može odrediti srednja greška

$$m_f^2 = \frac{[f^2]}{n} \tag{22}$$

Ako se raspolaže samo jednim odstupanjem dobiće se da je

$$m_f^2 = f^2 \tag{23}$$

Sa poslednjom smenom izraz (21) imaće izgled

$$f_i^2 = a_i \eta^2 + b_i \lambda^2 + c_i \lambda_0^2 \tag{24}$$

gde se kao nepoznate vrednosti pojavljuju kvadrati uticaja navedenih grešaka. Jednačine (24) biće zadovoljene za sve vlakove ako se levoj strani dodaju popravke

$$f_i^2 + V_i = a_i \eta^2 + b_i \lambda^2 + c_i \lambda_0^2. \tag{25}$$

Posljednji izraz i izraz (10) u suštini su isti. Razvijanje izraza (25) u Tajlorov red u okolini neke tačke sa pribličnim vrednostima nepoznatih $\eta_0=0$, $\lambda_0=0$ $(\lambda_0)_0=0$ nije moguće jer bi se za parcijalne izvode dobili neodređeni izrazi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{0}{0}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 = \frac{0}{0}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_0}\right)_0 = \frac{0}{0} \tag{26}$$

Prema tome do vrednosti nepoznatih η^2, λ^2 i λ^2_0 može se doći primenom metode izravnanja posrednih merenja, koristeći, kako je to prethodno objašnjeno kvadrate odstupanja.

LITERATURA

[1] Mihailović, K.: Geodezija II prvi deo, Građevinska knjiga, Beograd 1974.

[2] Mihailović, K.: Geodezija II drugi deo, Naučna knjiga, Beograd 1978.

[3] Vračarić, K.: Određivanje graničnih grešaka u poligonometrijskim mrežama, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Beograd 1978.

[4] Vračarić, K.: Prilog izučavanja kvadrata odstupanja, Zbornik Instituta za geodeziju, br. 25, 61—70, Beograd 1985.

REZIME

U radu je prikazana mogućnost određivanja nepoznatih na osnovu kvadrata merenih veličina. Ovo je moguće ako je funkcija, preko koje se povezuju rezultati merenja i nepoznate, data u obliku zbira kvadrata nepoznatih ili kao kvadratni koren iz tog zbira.

ABSTRACT

Capability of determination of unknown velues, based on squares of measured velues, was shown in the text. This is possible if the function, by which the results of measuring and unknown velues are connected, was given, either in shape of summation of squares of unknown velues, or as a square root of this summation.

Primljeno:: 1987—05—15