UDK 528.14
Pregledni rad

O SREDNJEM KVADRATNOM ODSTUPANJU JEDINICE TEŽINE

Gligorije PEROVIĆ — Beograd*

Zadnjih godina u našoj stručnoj javnosti počele su se pojavljivati neke dileme oko pojmova vezanih za srednju grešku jedinice težine. Te dileme odnose se na pitanje da li srednja greška jedinice težine ima dimenziju ili ne i na pitanje da li ona zavisi od geometrije mreže. S toga je, u cilju razjašnjenja i otklanjanja ovih dilema i nastao ovaj rad.

U vezi mere tačnosti, Gauss 1809, u svom čuvenom delu Theoria motus corporum coelestium, kaže:

»Uostalom konstanta h može se smatrati kao mera tačnosti opažanja. Stvarno, ako se u nekom sistemu opažanja verovatnoća greške Δ izrazi sa

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2},$$

a u drugom, više ili manje tačnom sistemu opažanja, sa

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2},$$

to se očekivanje, da će se greška bilo kog opažanja iz prvog sistema naći u granicama $-\delta$ i $+\varepsilon$, izražava integralom

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta,$$

u granicama $\Delta = -\delta$ do $\Delta = +\varepsilon$; na isti način, se očekivanje, da će se greška bilo kog opažanja drugog sistema naći u granicama $-\delta'$ i $+\delta'$, izražava integralom

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} d\Delta,$$

* Adresa autora: Doc dr Gligorije Perović, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Bulevar revolucije 73/I, Beograd

u granicama $\Delta = -\delta'$ do $\Delta = +\delta'$; uostalom, oba integrala su očigledno jednaki pošto je $h\delta = h'\delta'$. Prema tome, ako je, na primer, $h' = 2h, \ldots$, to znači, da se dvostruko veća greška u prvom sistemu može jednako desiti kao i greška u drugom sistemu, tj. dvostruko veća greška u prvom sistemu jednako je *verovatna* (podvukao G. P.) prostoj grešci u drugom sistemu; u tom slučaju, uopšte rečeno, opažanjima drugog sistema pripisuje se dvostruko veća tačnost«.

Posledica ove Gauss-ove konstatacije jeste da se greške mogu *upoređivati* samo preko *verovatnoće,* što povlači prethodno *normiranje grešaka.*

U istom delu Gauss dalje kaže: »Taj princip (govori se o principu najmanje sume kvadrata-prim. G. P.) može se bez ikakvih teškoća sada proširiti na opažanja *nejednake* tačnosti . . ., prema tome najverovatnija vrednost sistema veličina p, q, r, s, . . ., (p, q, r, s, . . . predstavljaju ocene $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}, \ldots$ nepoznatih x, y z, t, . . . — prim. G. P.) dobija se tada, kada suma

$$h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 + \ldots,$$

tj. kada *suma kvadrata razlika između rezultata opažanja i izračunatih vrednosti, pomnožene kvadratima brojeva, koji služe kao njihova mera tačnosti, bude minimalna.*

Prema tome nikako nije neophodno, da funkcije V, V′, V″, . . . (merene veličine — prim. G. P.) pripadaju jednorodnim veličinama, već mogu predstavljati nejednorodne veličine (na primer, lučne i vremenske sekunde), samo ako se može suditi o odnosima njihovih grešaka, koje se, svaka pojedinačno mogu jednako dogoditi (biti jednakoverovatne)«.

Pošto je Gauss već pokazao da se veličine h, h′, h″ . . . mogu povezati sa srednjim greškama m, m′, m″, . . ., koje odgovaraju greškama v, v′, v″, . . ., relacijama

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad h' = \frac{1}{m'\sqrt{2}}, \quad h'' = \frac{1}{m''\sqrt{2}}, \quad \ldots,$$

to izraz $h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 + \ldots$, dobija oblik

$$\frac{1}{2}(t^2 + t'^2 + t''^2 + \ldots),$$

pri čemu su: $t = \frac{v}{m}, \quad t' = \frac{v'}{m'}, \quad t'' = \frac{v''}{m''}, \quad \ldots,$ — *normirane greške*, tako da se Gauss-ov princip najmanjih kvadrata izražava *sumom kvadrata normiranih grešaka.*

U prvom delu rada Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiale, prezentiranom 1821. godine, Gauss uvodi i pojam težine:

»Smatrajući da je vrednost integrala $\int x^2\Phi(x)dx$ u granicama od $x = -\infty$ do $x = +\infty$ uvek jednaka m^2, mi ćemo veličinu m nazvati *srednjom očekivanom greškom,* ili prosto *srednjom greškom* opažanja, čije nepoznate greške x imaju relativnu verovatnošću $\Phi(x)$. Takav naziv nećemo ograničiti samo na neposredna opažanja, već ćemo ga proširiti na sve rezultate dobijene iz opažanja. Uostalom ne treba mešati srednju grešku sa aritmetičkom sredinom iz svih grešaka, o kojoj smo govorili u § 5.

Ako se upoređuje nekoliko sistema opažanja ili različitih veličina nejednake tačnosti, to ćemo za njihovu relativnu *težinu* smatrati veličinu obratno proporcionalnu m^2, dok je istovremeno *tačnost* obratno proporcionalna m. Prema tome da bi težinu izrazili brojem, potrebno je za jedinicu usvojiti težinu bilo kog sistema opažanja, izabranog sasvim proizvoljno«.

Iz ove Gauss-ove definicije sledi da težinu možemo izraziti u obliku

$$P = \frac{\mu^2}{m^2},$$

gde je μ^2 — proizvoljna konstanta (bez dimenzija!) veća od nule.

U istom radu, iz 1821. godine, dalje se navodi: »Sa definisanjem $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ ... očekivane srednje greške označimo sa m, m′, m″, ..., težine veličina sa p, p′, p″, ..., tada je $pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$. Odnos, koji postoji među srednjim greškama, smatraćemo poznatim, u kom slučaju će i težine postati poznate, pri čemu se bilo koja od njih može uzeti za jedinicu«.

U Supplementum Theoriae Combinationis Observationum erroribis minimis obnoxiae, prezentiranoj 1826. godine, kada se govori o minimumu sume kvadrata popravaka pri uslovnom izravnanju opažanja, kaže se:

»Određivanje najverovatnijih popravaka *nezavisno* (podvukao G. P.) od koeficijenata l, l′, l″, ... (koeficijenti uslovnih jednačina popravaka — prim. G. P.), očigledno je najpogodnije u svakom slučaju u kom se susreće sa opažanjima«.

Pošto koeficijenti uslovnih jednačina popravaka zavise od geometrije mreže (odnosno »sistema koji se izravnava«) onda je Gauss i ovo pitanje (zavisnosti ocena popravaka, koje on naziva najverovatnijim popravkama, od geometrije mreže) na neki način razmatrao.

Dajući težini $P \left(= \frac{\mu^2}{m^2}\right)$ vrednost 1 dobijamo identitet

$$1 = \frac{\mu^2}{m^2},$$

pa je stog razloga i sam Gauss konstantu μ^2 nazvao srednjom kvadratnom greškom jedinice težine, jer se njena brojna vrednost poklapa sa brojnom vrednošću m^2, ali ne i dimenzija.

U vezi konstante μ^2, Drozdov 1972 dokazuje »da je za izravnanje merenja sa uslovnim jednačinama popravaka $Av + w = 0$ ili jednačinama popravaka $v = Bx + d$ po metodu najmanjih kvadrata kovarijacionu matricu K_Δ ili težinsku matricu $P_\Delta = K_\Delta^{-1}$ vektora merenja dovoljno znati do proizvoljnog konstantnog množioca s^2, (to jest μ^2 — prim. G. P.) tj. s tačnošću do jedinice merenja elemenata tih matrica ... Šta više, rezultati rešenja zadatka izravnanja merenja daju mogućnost da se oceni veličina množioca s^2«.

Ocenu za μ^2 dobijamo po formuli,

$\hat{\mu}^2 = \dfrac{\sum p\hat{v}\hat{v}}{n-u}$ ili naša poznata oznaka $m_0^2 = \hat{\mu}^2$ gde je n — broj merenja, a u — broj nepoznatih pri posrednom izravnanju. Ovu relaciju dokazuje i Drozdov.

Konstantni faktor μ^2 ima veze sa parametrom razmere euklidovog n-dimenzionog prostora E_n proizvedenog n-dimenzionim vektorom rezultata merenja i, u matematičkoj statistici, najčešće se označava sa σ^2. No u vezi toga prvo istaknimo jednu definiciju.

Definicija: Funkcija gustine rasporeda $f(x;\sigma)$ slučajne veličine x naziva se gustinom s *parametrom razmere* σ, ako je

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{1}{\sigma} x\right) \quad \text{za svako } -\infty < x < \infty,$$

gde je f (x) — neka funkcija gustine rasoreda, a $0 < \frac{1}{\sigma} < \infty$.

Parametar σ, slučajne veličine x sa normalnim rasoredom $N(a, \sigma^2)$, zadovoljava uslove ove definicije pa, prema tome, predstavlja *parametar razmere* (odakle sledi njegova bezdimenzionost).

Što se tiče nezavisnosti ocene m_0^2 i ocena nepoznatih parametara (nezavisnost srednje greške jedinice težine od geometrije) prvi (i potpuni) dokaz dao je Helmert 1876. godine za merenja jedne veličine, sa njegovim čuvenim ortogonalnim transformacijama.

Good je 1963. godine dokazao sledeću teoremu: Ako je vektor y normalno raspoređen sa očekivanjem a i kovarijacijom K, tj.

$$y \sim N(a, K),$$

i imamo linearnu formu Cy i kvadratnu formu $y^T D y$, onda će one biti nezavisne ako i samo ako je

$$CKD = 0.$$

Kod posrednog izravnanja, ocena vektora nepoznatih i ocena srednje kvadratne greške jedinice težine glase respektivno

$$\hat{x} = -(A^T P A)^{-1} A^T P f,$$

i

$$m_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{n-u} = \frac{1}{n-u} f^T (P - PA(A^T PA)^{-1} A^T P) f$$

Sa oznakom

$$C = -(A^TPA)^{-1}A^TP, \quad D = P - PA(A^TPA)^{-1}A^TP \quad i \quad K_f = \sigma^2 p^{-1} = K,$$

dobijamo da je CKD = .0, što dokazuje nezavisnost ocena m_0^2 i x, tj. što dokazuje nezavisnost ocene m_0^2 od geometrije mreže, odnosno sistema.

Slični dokazi postoje i za nezavisnost $\hat{v}$ od $\hat{x}$.

Inače, metod najmanjih kvadrata ima i svoju geometrijsku interpretaciju, po kojoj se n-dimenzioni vektor rezultata merenja *l*, iz n-dimenzionog Euklidovog prostora E_n, ortogonalno projektuje u u-dimenzioni vektorski podprostor E_u (u je dimenzija vektora nepoznatih), pri čemu je ova projekcija jednoznačna — ako su kolone matrice A jednačina popravaka $v = Ax + f$ linearno nezavisne (broj nezavisnih kolona matrica A predstavlja dimenziju podprostora E_u). Iz ovoga sledi i ortogonalnost ocene popravaka $\hat{v} = A\hat{x} + f$ i ocena nepoznatih $\hat{x}$, što povlači da parametrijska funkcija h^Tx, gde je h — poznati konstantni vektor takav da je $h^T = C^TA$, ima jedinstvenu linearnu nepomerenu ocenu $h^T\hat{x}$ bez obzira da li je A potpunog ranga ili ne. Ovo takođe, povlači nezavisnost kvadratnih formi od $\hat{v}$ i $\hat{x}$.

Prema tome *nikako se ovo nije zaboravilo,* a ne: »nekako se zaboravilo« — kao što se u nekim člancima navodi.

NAPOMENA: Autor ovog članka se posebno trudio da čitaocu prezentira neke osnovne izvorne radove koji se tiču ovih problema.

LITERATURA

[1] Baarda W., (1968): A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No. 1, Delft.

[2] Дроздов Н. Д., (1972): Линеиная алгебра в теории уравнивания измерений. Недра, Москва.

[3] Gauss C. F., (1809): Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Hamburgi, Liber II, Sectio III. (Ruski prevod: K. F. Gauss, (1957): Избранные геодезические сочинения, Том I: Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям. Гамбург, 1809. Книга вторая, Раздел третий).

[4] Gauss C. F., (1921): Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiale, (Prvi deo). Prezentirana naučnom društvu u Getingenu 15. februara 1821. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Теория комбинации наблюдений, подверженных найменьшим ошибкам).

[5] Gauss C. F., (1823): Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiale, (Drugi deo). Prezentirana naučnom društvu u Getingenu 2. februara 1823. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Теория комбинации наблюдении, подверженных найменьшим ошибкам).

[6] Gauss C. F., (1826): Supplementum Theoriae Combinationis Observationum erroribis minimis obnoxiale. Prezentirana naučnom društvu u Getingenu 16 septembra 1826. g. (Ruski prevod u istoj knjizi: Дополнение к теории комбинации наблюдений, подверженных найменьшим ошибкам).

[7] Good I. J., (1963): On the independence of quadratic expressions (with an appendix by L. R. Welch). J. Roy. Stat. Soc. (B), 25, 377—382.

[8] Helmert F. R., (1876): Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direchter Beobachtungen gleicher Genauigkeit, Astron. Nachrichten, 88, No. 2096—97, 113—132.

[9] Cochran W. G., (1934): The Distribution of Quadratic Forms in a Normal System, Proc. Camb. Pxil. Soc., 30. 178—191.

[10] Krishnaiah R. P., Gen. ed., (1984); Handbook of Statistics 1, Analysis of Variance. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

[11] Lehman L. E., (1959): Testing Statistical Hypothesis. John Wiley, New York.

[12] Mierlo van J., (1985): Geometrische Darstellung einer Ausgleichung und Hypothesentests. AVN, 11—12/1985, 464—473.

[13] Muminagić A., (1986): Srednje kvadratno odstupanje jedinice težine. Geodetski list, 7—12, 189—192.

[14] Perović G., (1974): Težine raznorodnih mjerenja. Zbornik Geodetskog instituta, Br. 14, Beograd.

[15] Perović G., (1986): Singularna izravnanja. Naučna knjiga i Građevinski fakultet, Beograd.

[16] Rao C. R., (1973): Linear Statistical Inference and Its Applications (second edition). John Wiley, New York—London—Sydney—Toronto.

[17] Schefte H., (1959), The Analysis of Variance. John Wiley, New York.

[18] Zaks S., (1971): The Theory of Statistical Inference. John Wiley, New York—London-Sydney—Toronto.

[19] Milovanović Vl., (1977): Izravnanje raznorodnih merenja po metodi najmanjih kvadrata i normiranje merenja. Geodetska služba br. 18, str. 39—51.

REZIME

U radu se daje krtički osvrt na neke dileme u vezi srednje greške jedinice težine koje se u posljednje vreme pojavljuju u našoj stručnoj javnosti.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser gibt eigene Stellungnahme im Zusammenhang mit der Frage der Definition des Gewichtseinheitsfehlers, welche in letzter Zeit in jugoslawischen Fachzeitschriften erörtert wurde und dabai einige Dilemmata von neuem aufkammen.

Primljeno: 1987-02-24